

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР И НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Учебное пособие

г. Ставрополь
2017

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73

Литвин, Д.Б.

Элементы теории игр и нелинейного программирования: Учебное пособие / Д.Б. Литвин, С.В. Мелешко, И.И. Мамаев. – Ставрополь : Сервисшкола, 2017. – 84с.

Пособие предназначено для студентов направления Экономика - 38.03.01 очной и заочной форм обучения.

Содержание материала в целом соответствует второй части дисциплины «Методы оптимальных решений».

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР	4
1.1. Основные понятия. Принцип «минимакса».....	4
1.2. Решение матричных игр в чистых стратегиях.....	6
Задания для решения в аудитории	7
1.3. Смешанные стратегии в матричных играх	17
1.4. Методы решения простейших игр	18
Дублирующие и заведомо невыгодные стратегии.....	18
Аналитическое решение игры 2×2	19
Графическое решение игры 2×2	21
Графическое решение игр $2 \times n$ и $m \times 2$	30
Задания для решения в аудитории	36
1.5. Решение матричных игр методами линейного программирования	38
Задания для решения в аудитории	42
2. ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	49
2.1. Геометрический метод решения задачи нелинейного программирования	49
Задания для самостоятельного решения	54
2.2. Выпуклое программирование.....	60
2.2.1. Краткие теоретические сведения	60
2.2.2. Теорема Куна — Таккера	61
2.3. Численные методы.....	62
2.3.1. Метод возможных направлений	62
2.3.2. Метод условного градиента	73
Задание для самостоятельного решения	78
2.4. Использование надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Excel.....	82
Литература	84

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

1.1. Основные понятия. Принцип «минимакса»

Конечная игра, в которой игрок A имеет m стратегий, а игрок B – n стратегий, называется игрой $m \times n$.

В дальнейшем, для удобства сторону A будем условно именовать «мы», а сторону B – «противник». Будем обозначать наши стратегии A_1, A_2, \dots, A_m ; стратегии противника B_1, B_2, \dots, B_n .

Пусть каждая сторона выбрала определенную стратегию; для нас это будет A_i для противника B_j .

Если игра состоит только из личных ходов, то выбор стратегий A_i, B_j однозначно определяет исход игры – наш выигрыш. Обозначим его a_{ij} .

Пусть нам известны значения a_{ij} выигрыша при каждой паре стратегий. Значения a_{ij} можно записать в виде прямоугольной таблицы (матрицы), строки которой соответствуют нашим стратегиям (A_i), а столбцы – стратегиям противника (B_j). Такая таблица называется *платежной матрицей* или просто *матрицей игры*.

$A \backslash B$	B_1	B_2	\dots	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	$\vdots \vdots \vdots$	\vdots
A_m	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}

Оптимальной стратегией игрока в теории игр называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш (или, что то же, минимально возможный средний проигрыш).

При выборе этой стратегии основой рассуждений является предположение, что противник является по меньшей мере таким же разумным, как и мы сами, и делает все для того, чтобы помешать нам добиться своей цели.

Выбирая стратегию A_i мы всегда должны рассчитывать на то, что противник ответит на нее той из стратегий B_j для которой наш выигрыш

a_{ij} минимален. Определим это значение выигрыша, т.е. минимальное из чисел a_{ij} в i -й строке. Обозначим его α_i :

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}. \quad (1)$$

Выбирая какую-либо стратегию A_i мы должны рассчитывать на то, что в результате разумных действий противника мы не выиграем больше чем α_i . Естественно, что, действуя наиболее осторожно и рассчитывая на наиболее разумного противника (т. е. избегая всякого риска), мы должны остановиться на той стратегии A_i , для которой число α_i является максимальным. Обозначим это максимальное значение α :

$$\alpha = \max_i \alpha_i,$$

или, принимая во внимание формулу (1),

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Выпишем числа α_i рядом с матрицей справа в виде добавочного столбца:

	B					
A		B_1	B_2	\dots	B_n	α_i
A_1		a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}	α_1
A_2		a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}	α_2
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
A_m		a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}	α_m
β_j		β_1	β_2	\dots	β_m	

Величина α называется **нижней ценой игры**, иначе – **максиминным выигрышем** или просто **максимином**.

Число α лежит в определенной строчке матрицы, и та стратегия игрока A , которая соответствует этой строчке, называется **максиминной стратегией**.

Очевидно, если мы будем придерживаться максиминной стратегии, то нам при любом поведении противника гарантирован выигрыш не меньший α . Поэтому величина α и называется «**нижней ценой игры**».

Это – тот гарантированный минимум, который мы можем себе обеспечить, придерживаясь наиболее осторожной («перестраховочной») стратегии.

Очевидно, аналогичное рассуждение можно провести и за против-

ника B . Противник хочет ограничить свой проигрыш (наш выигрыш), поэтому он будет выбирать стратегию с минимально возможным проигрышем. Для этого он должен просмотреть каждую свою стратегию с точки зрения максимального проигрыша при этой стратегии. Поэтому внизу матрицы мы выпишем максимальные значения a_{ij} по каждому столбцу и найдем минимальное из β_j .

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, \quad \beta = \min_j \beta_j, \quad \beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Величина β называется **верхней ценой игры**, иначе – **минимаксом**. Соответствующая минимаксному выигрышу стратегия противника называется его «минимаксной стратегией».

Придерживаясь своей наиболее осторожной минимаксной стратегии, противник гарантирует себе следующее: что бы мы ни предприняли против него, *он во всяком случае проиграет сумму, не большую чем β* .

Принцип осторожности, диктующий игрокам выбор соответствующих стратегий называют «принципом минимакса».

1.2. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Обычно положение, при котором оба игрока пользуются своими минимаксными стратегиями, является *неустойчивым*, в том смысле, что может быть нарушено поступившими сведениями о стратегии противной стороны.

Однако существуют некоторые игры, для которых минимаксные стратегии являются *устойчивыми*. Это те игры, для которых нижняя цена равна верхней:

$$\alpha = \beta$$

Если нижняя цена игры равна верхней, то их общее значение называется *чистой ценой игры* (или просто *ценой игры*); мы его будем обозначать буквой v .

Пример 1. Пусть игра 4×4 задана матрицей:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	0,4	0,5	0,9	0,3	0,3
A_2	0,8	0,4	0,3	0,7	0,3
A_3	0,7	0,6	0,8	0,9	0,6
A_4	0,7	0,2	0,4	0,6	0,2
β_j	0,8	0,6	0,8	0,9	

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры: $\alpha = 0,6$; $\beta = 0,6$.

Они оказались одинаковыми, следовательно, у игры есть чистая цена, равная $\alpha = \beta = v = 0,6$.

Элемент 0,6, выделенный в платежной матрице, является одновременно *минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце*.

Элемент матрицы, обладающий этим свойством, называется *седловой точкой матрицы*.

Седловой точке соответствует пара минимаксных стратегий (в данном примере A_3 и B_2). Эти стратегии называются *оптимальными*, а их совокупность – *решением игры*.

Решение игры обладает следующим замечательным свойством. *Для игрока, допустившего отклонение от своей оптимальной стратегии, это никогда не может оказаться выгодным*.

Это утверждение легко проверить на примере рассматриваемой игры с седловой точкой.

Мы видим, что в случае игры с седловой точкой минимаксные стратегии обладают своеобразной «устойчивостью»: если одна сторона придерживается своей минимаксной стратегии, то для другой может быть только невыгодным отклоняться от своей.

Заметим, что в этом случае наличие у любого игрока сведений о том, что *противник избрал свою оптимальную стратегию, не может изменить собственного поведения игрока*: если он не хочет действовать против своих же интересов, он должен придерживаться своей оптимальной стратегии.

Задания для решения в аудитории

1. Найти нижнюю и верхнюю цены игры с платежной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. В конфликтной ситуации участвуют две стороны: А - государственная налоговая инспекция; В – налогоплательщик с определенным годовым доходом, налог с которого составляет 13 % годовых.

У стороны А два возможных варианта поведения. A_1 – не контролировать доход налогоплательщика; A_2 – контролировать доход налогоплательщика В и взимать с него: налога в размере 13 % годовых, если доход заявлен и соответствует действительности; налога в размере 13 % годовых и штрафа в размере 7%, если заявленный в декларации доход меньше действительного, или в случае сокрытия всего налога.

У стороны В три стратегии поведения: B_1 – заявить о действительном доходе; B_2 – заявить доход меньше действительного и реально налог в этом случае составит 7%; B_3 – скрыть доход, тогда не надо будет платить налог.

Составить матрицу игры и найти все оптимальные стратегии обоих игроков. Предварительно проверить наличие седловой точки и возможности доминирования.

2. Для отопления помещения надо заготовить топливо. Расход топлива и цены на него зависят от погоды в зимнее время. Зима может быть мягкой, нормальной и суровой. Исходные данные для составления платежной матрицы игры в таблице.

Показатели	Зима		
	мягкая	нормальная	суровая
Расход, т	7	12	20
Цена, руб. за 1 т	200	300	400

Летом можно уголь закупить по минимальной цене 200 рублей, а неиспользованный остаток продавать весной по 100 рублей за тонну. Определите оптимальную стратегию в закупке топлива: $A_1 - 7$ т, $A_2 - 12$ т и $A_3 - 20$ т.

Рассчитайте оптимальные *затраты* (выберите оптимальную стратегию закупки топлива) на покупку топлива в расчете на одно помещение с учетом данных таблицы. (Обозначим состояние погоды (*стратегии погоды*) зимой: мягкая зима – B_1 , нормальная – B_2 , суровая – B_3 .)

3. Два предприятия, производящие шкафы-купе, конкурируют между собой за рынок сбыта. Стратегии, которыми могут воспользоваться оба предприятия, заданы следующей матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определите, какие стратегии являются наиболее выгодными для предприятий.

4. Предприятие имеет возможность самостоятельно планировать объемы выпуска сезонной продукции Π_1 , Π_2 , Π_3 . Не проданная в течение сезона продукция позже реализуется по сниженной цене. Данные о себестоимости продукции, отпускных ценах и объемах реализации в зависимости от уровня спроса приведены в таблице:

Вид продукции	Себестоимость	Цена единицы продукции		Объем реализации при уровне спроса		
		В течение сезона	После уценки	повышенный	средний	пониженный
Π_1	2,6	3,4	2,8	14	8	5
Π_2	3,7	4,2	3,2	38	22	9
Π_3	1,5	2,8	1,7	24	13	7

Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, указать допустимые стратегии сторон, составить платежную матрицу;

2) дать рекомендации об объемах выпуска продукции по видам, обеспечивающих предприятию наивысшую прибыль.

Указание. Для уменьшения размерности платежной матрицы считать, что одновременно на все три вида продукции уровень спроса одинаков: повышенный, средний или пониженный.

5. Генеральные директора компаний Motorola и Samsung на корпоративной вечеринке поспорили о том, чья компания останется в выигрыше при продаже новой серии сотовых телефонов. Стратегии, среди которых компании должны выбрать свою, представлены в матрице Y . Определите наиболее выгодную из стратегий для каждого предприятия, а также цену игры.

$$Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Горный курорт предлагает четыре вида экскурсионных троп, начинающихся соответственно от I, II, III и IV уровней канатной дороги. Количество комплектов с провиантом и необходимыми приспособлениями, а также цена на них зависят от высоты, на которой расположены тропы. Причем, решение о продолжении похода и переходе на следующую тропу группа принимает в пути. Исходные данные для составления платежной матрицы игры даны в таблице.

<i>Уровни дороги</i>	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
<i>Комплектов, шт.</i>	3	7	12	17
<i>Цена, руб. за комплект</i>	100	150	200	250

Необходимые турнаборы можно закупить перед походом по цене в 100 руб. за комплект.

Определить оптимальную стратегию в закупке наборов до начала похода,

если на фиксированную группу в зависимости от уровня дороги необходимо: A_1 – 3 комплекта, A_2 – 7 комплектов, A_3 – 12 комплектов, A_4 – 17 комплектов.

1.3. Смешанные стратегии в матричных играх

Комбинированные стратегии, состоящие в применении нескольких чистых стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот, называются *смешанными стратегиями*.

В теории игр доказывается, что, применяя не только чистые, но и смешанные стратегии, *можно для каждой конечной игры получить решение, т.е. пару таких (в общем случае смешанных) стратегий, что при применении их обоими игроками выигрыш будет равен цене игры, а при любом одностороннем отклонении от оптимальной стратегии выигрыш может измениться только в сторону, невыгодную для отклоняющегося.*

Высказанное утверждение составляет содержание так называемой *основной теоремы теории игр*. Эта теорема была впервые доказана фон Нейманом в 1928 г.

Из основной теоремы следует, что каждая конечная игра имеет цену. Очевидно, что цена игры v всегда лежит между нижней ценой игры α и верхней ценой игры β :

$$\alpha \leq v \leq \beta \quad (2)$$

Введем специальное обозначение для смешанных стратегий. Если, например, наша смешанная стратегия состоит в применении стратегий A_1, A_2, A_3 с частотами p_1, p_2, p_3 , то будем обозначать эту стратегию

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Аналогично смешанную стратегию противника будем обозначать:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}, \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1.$$

где q_1, q_2, q_3 – частоты использования стратегий B_1, B_2, B_3 .

Предположим, что нами найдено решение игры, состоящее из двух оптимальных смешанных стратегий S_A^*, S_B^* .

В общем случае не все чистые стратегии, доступные данному игроку, входят в его оптимальную смешанную стратегию, а только некоторые. Будем называть стратегии, входящие в оптимальную смешанную стратегию игрока, его «активными» стратегиями.

Оказывается, что решение игры обладает еще одним замечательным свойством: *если один из игроков придерживается своей оптимальной сме-*

шанной стратегии $S_A^*(S_B^*)$, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v , независимо от того, что делает другой игрок, если он, только не выходит за пределы своих «активных» стратегий. Он, например, может пользоваться любой из своих «активных» стратегий в чистом виде, а также может смешивать их в любых пропорциях.

1.4. Методы решения простейших игр

Если игра $m \times n$ не имеет седловой точки, то нахождение решения есть вообще довольно трудная задача, особенно при больших m и n .

Дублирующие и заведомо невыгодные стратегии

Иногда эту задачу удастся упростить, если предварительно уменьшить число стратегий путем вычеркивания некоторых излишних.

Излишние стратегии бывают

- а) дублирующие;
- б) заведомо невыгодные (мажорируемые).

Рассмотрим, например, игру с матрицей:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_2	0	2	3	2
A_3	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Стратегия A_3 в точности повторяет («дублирует») стратегию A_1 поэтому любую из этих двух стратегий можно вычеркнуть.

Далее, сравнивая почленно строки A_1 и A_2 видим, что каждый элемент строки A_2 меньше (или равен) соответствующего элемента строки A_1 . Очевидно, что мы никогда не должны пользоваться стратегией A_2 ; она является заведомо невыгодной. Вычеркивая A_3 и A_2 , приводим матрицу к более простому виду.

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Далее замечаем, что для противника стратегия B_3 заведомо невыгодна в сравнении с B_4 ; вычеркивая ее, приводим матрицу к окончательному виду

A \ B	B_1	B_2	B_4
A_1	1	2	3
A_4	4	3	0

Таким образом, игра 4×4 вычеркиванием дублирующих и заведомо невыгодных стратегий сведена к игре 2×3 .

Процедура вычеркивания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий всегда должна предшествовать решению игры.

Аналитическое решение игры 2×2

Рассмотрим игру 2×2 с матрицей:

A \ B	B_1	B_2	
A_1	a_{11}	a_{12}	p_1
A_2	a_{21}	a_{22}	p_2
	q_1	q_2	

Пусть седловой точки нет и, следовательно, нижняя цена игры не равна верхней: $\alpha \neq \beta$. Требуется найти оптимальную смешанную стратегию игрока А:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Она отличается тем свойством, что, каковы бы ни были действия противника (если только он не выходит за пределы своих «активных» стратегий), выигрыш будет равен цене игры v . В игре 2×2 обе стратегии противника являются «активными», – иначе игра имела бы решение в области чистых стратегий (седловую точку).

Значит, если мы придерживаемся своей оптимальной стратегии (3), то противник может пользоваться любой из своих чистых стратегий B_1, B_2 не изменяя среднего выигрыша v .

Отсюда имеем два уравнения (по столбцам):

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \end{cases} \quad (4)$$

из которых, принимая во внимание, что $p_1 + p_2 = 1$, получим:

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) &= a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1), \\ (a_{11} - a_{21})p_1 + a_{21} &= (a_{12} - a_{22})p_1 + a_{22} \\ p_1 &= \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad p_2 = 1 - p_1 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{aligned} \quad (5)$$

Цену игры v найдем, подставляя значения p_1 , p_2 в любое из уравнений (4).

Если цена игры известна, то для определения оптимальной стратегии противника $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ достаточно одного уравнения, например по первой строке матрицы:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v,$$

откуда, учитывая, что $q_1 + q_2 = 1$, имеем:

$$q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, \quad q_2 = 1 - q_1.$$

Пример 1. (орел-решка). Два игрока A и B , не глядя друг на друга, кладут на стол по монете вверх гербом или цифрой, по своему усмотрению. Если игроки выбрали одинаковые стороны (у обоих герб или у обоих цифра), то игрок A забирает обе монеты; иначе их забирает игрок B . Матрица игры имеет вид. Найдем решение этой игры.

	B	B_1	B_2	
A		B_1	B_2	
A_1		1	-1	p_1
A_2		-1	1	p_2
		q_1	q_2	

Игра не имеет седловой точки ($\alpha = -1$; $\beta = +1$), и, следовательно, решение должно лежать в области смешанных стратегий:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}; \quad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Нужно найти p_1 , p_2 , q_1 и q_2 .

Для p_1 имеем уравнение

$$1 \cdot p_1 + (-1) \cdot (1 - p_1) = (-1) \cdot p_1 + 1(1 - p_1).$$

откуда

$$p_1 = \frac{1}{2}; \quad p_2 = \frac{1}{2}.$$

Аналогично найдем:

$$q_2 = \frac{1}{2}; \quad q_2 = \frac{1}{2}; \quad v = 0.$$

Следовательно, оптимальная стратегия для каждого из игроков состоит в том, чтобы случайным образом чередовать обе свои чистые стратегии, пользуясь одинаково часто каждой из них; при этом средний выигрыш будет равен нулю.

Графическое решение игры 2x2

Решению игры 2×2 можно дать простую геометрическую интерпретацию. Пусть имеется игра 2×2 с матрицей, приведенной ниже.

	B	B_1	B_2	
A		B_1	B_2	
A_1		a_{11}	a_{12}	p_1
A_2		a_{21}	a_{22}	p_2
		q_1	q_2	

Согласно соотношениям для стратегий A имеем (4)

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v & \rightarrow B_1 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v & \rightarrow B_2 \end{cases} \quad (6)$$

Принимая во внимание, что $p_1 + p_2 = 1$, выражения (6) представляют собой линейные функции одной переменной, например $v = v(p_2)$. Изобразим их в графическом виде.

p_2	$0(p_1 = 1)$	$1(p_1 = 0)$		p_1	$0(p_1 = 1)$	$1(p_1 = 0)$
v	a_{11}	a_{21}		v	a_{12}	a_{22}

Возьмем участок оси абсцисс длиной 1 (рисунок 1). Левый конец участка (точка с абсциссой $x=0$) будет изображать стратегию A_1 , правый конец участка ($x=1$) – стратегию A_2 . Проведем через точки A_1 и A_2 два перпендикуляра к оси абсцисс: ось $I-I$ и ось $II-II$. На оси $I-I$ будем

откладывать выигрыши при стратегии A_1 ; на оси $II-II$ – выигрыши при стратегии A_2 .

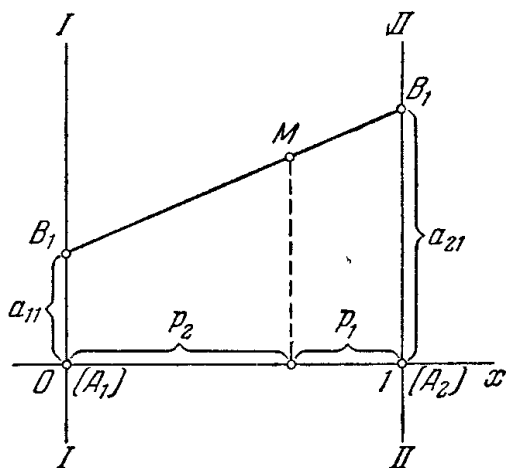


Рисунок 1 – Стратегия B_1

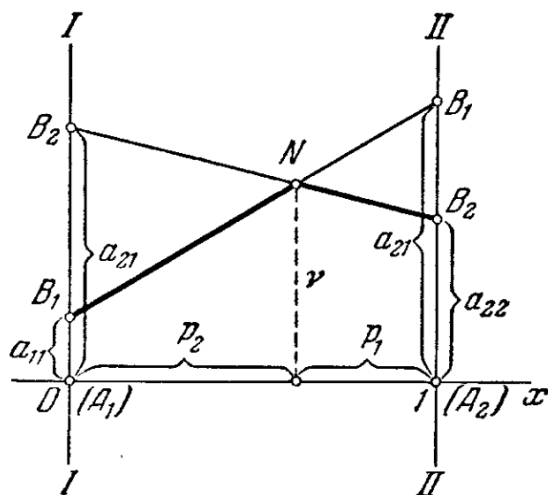


Рисунок 2 – Оптимальная стратегия S_A^*

Рассмотрим стратегию противника B_1 , она дает две точки на осях $I-I$ и $II-II$ с ординатами соответственно a_{11} и a_{21} . Проведем через эти точки прямую B_1B_1 . Очевидно, если мы при стратегии противника B_1 будем применять смешанную стратегию $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_1 \end{pmatrix}$, то наш средний выигрыш, равный в этом случае $a_{11}p_1 + a_{12}p_2$ изобразится точкой M на прямой B_1B_1 ; абсцисса этой точки равна p_2 . Прямую B_1B_1 изображающую выигрыш при стратегии B_1 будем условно называть «стратегией B_1 ».

Очевидно, точно таким же способом может быть построена и стратегия B_2 (рисунок 2).

Нам нужно найти оптимальную стратегию S_A^* , т. е. такую, для которой минимальный выигрыш (при любом поведении B) обращался бы в максимум.

Для этого построим *нижнюю границу выигрыша* при стратегиях B_1, B_2 , т. е. ломаную B_1NB_2 , отмеченную на рисунке 2 жирной линией. Эта нижняя граница будет выражать минимальный выигрыш игрока A при любых его смешанных стратегиях; точка N , в которой этот минимальный выигрыш достигает максимума, и определяет решение и цену игры. Нетрудно убедиться, что ордината точки N есть цена игры v , а ее абсцисса равна p_2 – частоте применения стратегии A_2 в оптимальной смешанной

стратегии S_A^* .

В нашем случае решение игры определялось точкой пересечения стратегий. Однако это не всегда будет так; на рисунке 3 показан случай, когда, несмотря на наличие пересечения стратегий, решение дает для обоих игроков чистые стратегии (A_2 и B_2), а цена игры $v = a_{22}$.

В данном случае матрица имеет седловую точку, и стратегия A_1 является заведомо невыгодной, т. к. при любой чистой стратегии противника она дает меньший выигрыш, чем A_2 .

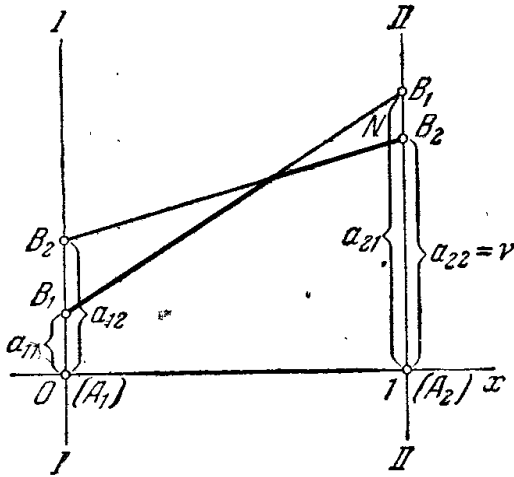


Рисунок 3 – Седловая точка a_{22}

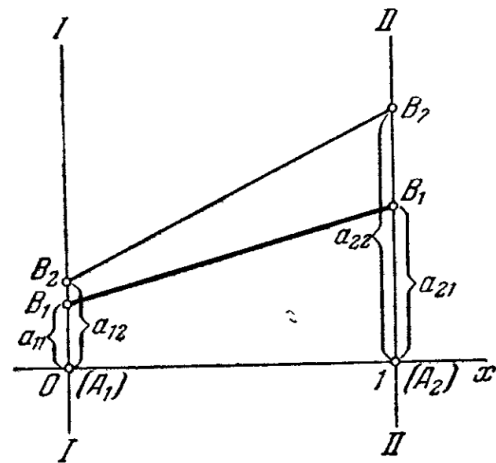


Рисунок 4 – Невыгодная стратегия B_2

В случае, когда заведомо невыгодная стратегия имеется у противника, геометрическая интерпретация имеет вид, представленный на рисунке 4. В данном случае нижняя граница выигрыша совпадает со стратегией B_1 ; стратегия B_2 для противника является заведомо невыгодной.

Геометрическая интерпретация дает возможность представить наглядно также нижнюю и верхнюю цены игры (рисунок 5).

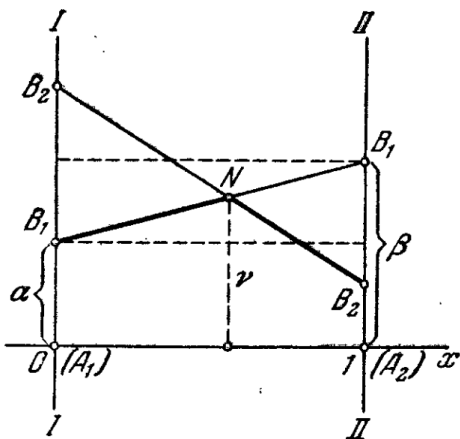


Рисунок 5 - Нижняя и верхняя цена игры

Пример 2. Решите матричную игру $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Проверим, есть ли в игре седловая точка. Нижняя цена игры $\alpha = \max\{-2; 0\} = 0$, верхняя цена игры $\beta = \min\{5; 3\} = 3$. $\alpha < \beta$, следовательно, седловой точки нет. Решение ищем среди смешанных стратегий. Для первого игрока ищем смешанную стратегию $\bar{P} = (p; 1-p)$, где $0 \leq p \leq 1$.

Изображаем две прямые (рисунок 6):

$$B_1B_1: v = -2p + 5(1-p) \quad \text{и} \quad B_2B_2: v = 3p + 0(1-p).$$

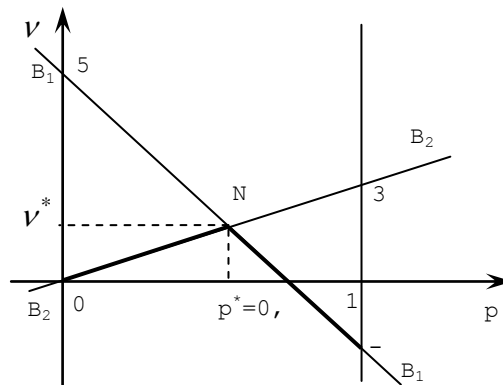


Рисунок 6 - Решение игры для первого игрока

Наивысшая точка нижней огибающей N определяет решение первого игрока. Для нахождения её координат необходимо решить систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} -2p + 5(1-p) = v \\ 3p + 0(1-p) = v \end{cases} \Rightarrow N(0,5; 1,5) \Rightarrow \bar{P}^* = (0,5; 0,5), \quad v = 1,5.$$

Для второго игрока ищем смешанную стратегию $\bar{Q} = (q; 1-q)$, где $0 \leq q \leq 1$.

Изображаем две прямые (рисунок 7):

$$A_1A_1: v = -2q + 3(1-q) \quad \text{и} \quad A_2A_2: v = 5q + 0(1-q).$$

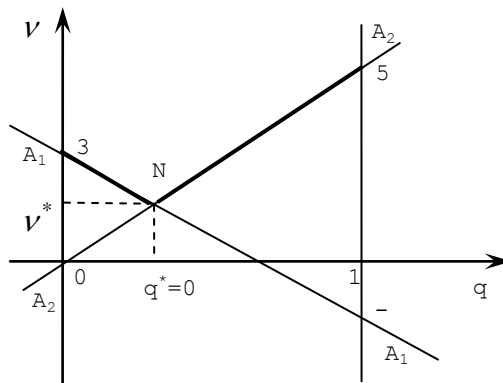


Рисунок 7 - Решение игры для второго игрока

Низшая точка верхней огибающей N определяет решение второго игрока. Для нахождения её координат необходимо решить систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} -2p + 3(1-p) = v \\ 5p + 0(1-p) = v \end{cases} \Rightarrow N(0,3; 1,5) \Rightarrow \bar{Q}^* = (0,3; 0,7), \quad v = 1,5.$$

Ответ: $\bar{P}^* = (0,5; 0,5)$; $\bar{Q}^* = (0,3; 0,7)$, $v = 1,5$.

Задания для решения в аудитории

I. Исследуйте игры, заданные следующими матрицами:

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & 6 \\ -5 & 3 & -2 & -4 \\ 8 & 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 & 6 & 5 \\ 6 & 2 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 1 & -3 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & -5 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

II. Решить задачи теории игр.

1. Решить задачу с платежной матрицей 2×2 аналитическим методом.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 22 \\ 32 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Составить платежную матрицу и решить игру.

Швейное предприятие реализует свою продукцию через магазин. Сбыт зависит от состояния погоды. В условиях теплой погоды предприятие реализует 1000 костюмов и 2300 платьев, а при прохладной погоде - 1400 костюмов и 700 платьев. Затраты на изготовление одного костюма равны 20 , а платья - 5 рублям, цена реализации соответственно равна 40 рублей и 12 рублей. Определить оптимальную стратегию предприятия.

4. Решить задачи теории игр графическим и аналитическим методами.

а) Обувная фабрика планирует выпуск моделей обуви A и B . Спрос на эту продукцию неопределен, однако можно предположить, что он может принимать одно из двух состояний (1 и 2). В зависимости от этих состояний прибыль предприятия различна и определяется матрицей $A = \begin{pmatrix} 52 & 22 \\ 22 & 49 \end{pmatrix}$. Найдите оптимальное соотношение между объемами выпуска каждой из моделей, при котором предприятию гарантируется средняя величина прибыли при любом состоянии спроса.

б) Банк заинтересован в покупке акций некоего АО. Стремясь сделать покупку более выгодной, банк снабжает продавца информацией о реальной стоимости акций, которая может быть как правдивой, так и ложной - (A_1, A_2) .

Продавец может поверить, может нет - (B_1, B_2) .

Условие – игровая матрица, в которой данные о величине возможной успешности сделки – прирост стоимости по отношению к вложенным средствам:

$$\begin{pmatrix} 0,608 & 1,000 \\ 1,000 & 0,440 \end{pmatrix}$$

Необходимо выбрать стратегию банка, при которой результат окажется максимально возможным.

Графическое решение игр $2 \times n$ и $m \times 2$

Решение игры $2 \times n$

Совершенно аналогично может быть решена любая игра $2 \times n$, где у нас имеются всего две стратегии, а у противника – произвольное число.

Пусть мы располагаем двумя стратегиями: A_1, A_2 , а противник – n стратегиями: B_1, B_2, \dots, B_n . Матрица $\|a_{ij}\|$ состоит из двух строк и n столбцов. Аналогично случаю двух стратегий дадим задаче геометрическую интерпретацию; n стратегий противника изобразятся n прямыми (рисунок 8). Строим нижнюю границу выигрыша (ломаную B_1MNB_2) и находим на ней точку N с максимальной ординатой. Эта точка дает решение игры (стратегию $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_1 \end{pmatrix}$); ордината точки N равна цене игры, а абсцисса равна частоте p_2 стратегии A_2 .

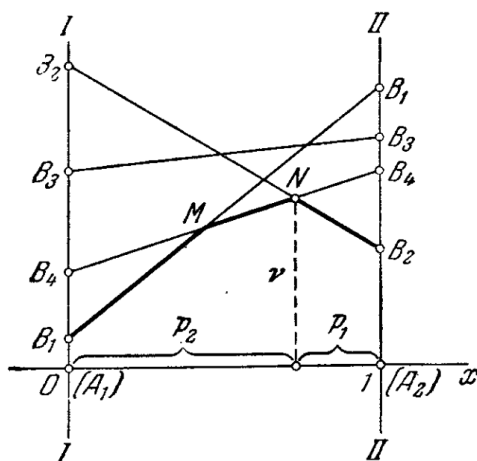


Рисунок 8 – Решение игры 2×4 для игрока А

В данном случае оптимальная стратегия противника получается применением смеси двух «полезных» стратегий: B_2 и B_4 , пересекающихся в точке N . Стратегия B_3 является заведомо невыгодной, а стратегия B_1 – невыгодной при оптимальной стратегии S_A^* . Если A будет придерживаться своей оптимальной стратегии, то выигрыш не изменится, какой бы из своих «полезных» стратегий ни пользовался B , однако, он изменится, если B перейдет к стратегиям B_1 или B_3 .

В теории игр доказывается, что у любой конечной игры $m \times n$ имеется решение, в котором число «полезных» стратегий той и другой стороны не превосходит наименьшего из двух чисел m и n . В частности, из

этого следует, что у игры $2 \times m$ всегда имеется решение, в котором с той и другой стороны участвует не более двух «полезных» стратегий.

Пользуясь геометрической интерпретацией, можно дать простой способ решения любой игры $2 \times m$. Непосредственно по чертежу находим пару «полезных» стратегий противника B_j и B_k , пересекающиеся в точке N (если в точке N пересекается более двух стратегий, берем любые две из них). Мы знаем, что если игрок A придерживается своей оптимальной стратегии, то выигрыш не зависит от того, в какой пропорции применяет B свои «полезные» стратегии, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} &= v, \\ p_1 a_{1k} + p_2 a_{2k} &= v. \end{aligned} \right\}$$

Из этих уравнений и условия $p_2 = 1 - p_1$, находим p_1 , p_2 и цену игры v .

Зная цену игры, можно сразу определить оптимальную стратегию игрока B

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_j & B_k \\ q_j & q_k \end{pmatrix}.$$

Для этого решается, например, уравнение:

$$q_j a_{1j} + q_k a_{1k} = v, \quad \text{где } q_j + q_k = 1.$$

Решение игры $m \times 2$

В случае, когда мы располагаем m стратегиями, а противник – всего двумя, очевидно, задача решается совершенно аналогичным способом; достаточно заметить, что, изменяя знак выигрыша на обратный, можно превратить игрока A из «выигрывающего» в «проигрывающего».

Можно решить игру и без перемены знака выигрыша; тогда задача решается непосредственно для B , но строится не нижняя, а верхняя граница выигрыша (рисунок 9). На границе ищется точка N с минимальной ординатой, которая и есть цена игры v .

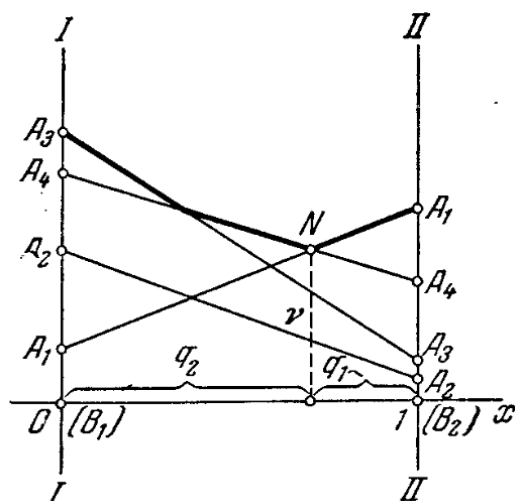


Рисунок 9 – Решение игры 4x2 для игрока В

Пример 3. Решить игру с матрицей выигрышей $A = \begin{pmatrix} -30 & 45 & 60 \\ 120 & -15 & -30 \end{pmatrix}$.

Решение. Поскольку все числа матрицы выигрышей кратны 15, то можно перейти к другой матрице В, такой что $b_{ij} = a_{ij} / 15$. Оптимальное решение при этом не изменится, а полученная цена игры $\nu_B = \nu_A / 15$.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 8 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Проверим, есть ли седловая точка и заведомо невыгодные (мажорируемые) стратегии.

Нижняя цена игры $\alpha = \max\{-2; -2\} = -2$, верхняя цена игры $\beta = \min\{8; 3; 4\} = 3$. $\alpha < \beta$, следовательно, седловой точки нет. Решение ищем среди смешанных стратегий.

Мажорируемых строчек нет ($-2 < 8$; $3 > -1$; $4 > -2$). Мажорируемых столбцов нет ($-2 < 3$; $8 > -1$), ($-2 < 4$; $8 > -2$) и ($3 < 4$; $-1 > -2$).

Решение начинаем с игрока, у которого ровно две стратегии. В данном случае, с первого игрока. Для него ищем смешанную стратегию $\bar{P} = (p; 1-p)$, где $0 \leq p \leq 1$.

Строим три прямых, изображающих средние выигрыши первого игрока, когда второй игрок выбирает одну из трех своих чистых стратегий (рис. 10):

$$B_1B_1: \nu = -2p + 8(1-p),$$

$$B_2B_2: \nu = 3p - 1(1-p),$$

$$B_3B_3: \nu = 4p - 2(1-p).$$

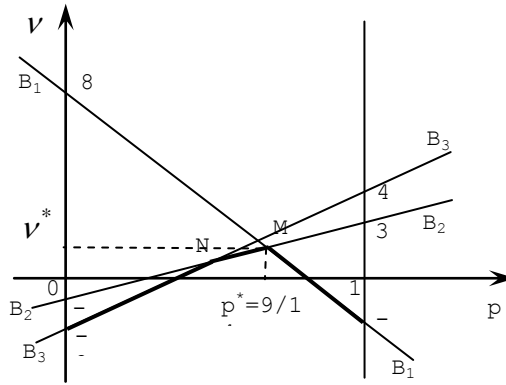


Рисунок 10 - Решение игры для первого игрока

Нижняя огибающая в данном случае состоит из трех кусков: $B_3NM B_1$. Наивысшая точка нижней огибающей M определяет решение первого игрока. Для нахождения её координат необходимо решить систему уравнений, пересечением которых она является. В данном случае - это прямые $B_1 B_1$ и $B_2 B_2$:

$$\begin{cases} -2p + 8(1-p) = v \\ 3p - (1-p) = v \end{cases} \Rightarrow M(9/14; 22/14) \Rightarrow \bar{P}^* = \left(\frac{9}{14}; \frac{5}{14} \right), v_B = 1,57.$$

Для второго игрока ищем смешанную стратегию $\bar{Q} = (q_1; q_2; q_3)$, где $0 \leq q_{1,2,3} \leq 1$. Какие две из трех стратегий второго игрока будут активны, зависит от вида нижней огибающей первого игрока.

Общее правило таково: если наивысшая точка нижней огибающей первого игрока является точкой пересечения k -ой и l -ой прямых, то оптимальная смешанная стратегия второго игрока содержит ненулевые компоненты на k -ом и l -ом местах. Остальные компоненты равны нулю. Аналогично для игры $m \times 2$: если низшая точка верхней огибающей второго игрока является точкой пересечения k -ой и l -ой прямых, то оптимальная смешанная стратегия первого игрока содержит ненулевые компоненты на k -ом и l -ом местах. Остальные компоненты равны нулю.

Поскольку в нашем случае точка M была получена пересечением первой и второй прямых, то, соответственно, в векторе $\bar{Q} = (q_1; q_2; q_3)$ будут ненулевые компоненты на первом и втором местах (активные первая и вторая чистые стратегии), третья равна нулю. Т.е. оптимальную смешанную стратегию второго игрока ищем в виде: $\bar{Q} = (q; 1-q; 0)$.

Строим две прямые, изображающие средние проигрыши второго игрока, когда первый игрок выбирает одну из двух своих чистых стратегий (рис. 11):

$$A_1 A_1: v = -2q + 3(1-q) + 4 \cdot 0 \text{ и}$$

$$A_2 A_2: v = 8q - (1-q) - 2 \cdot 0.$$

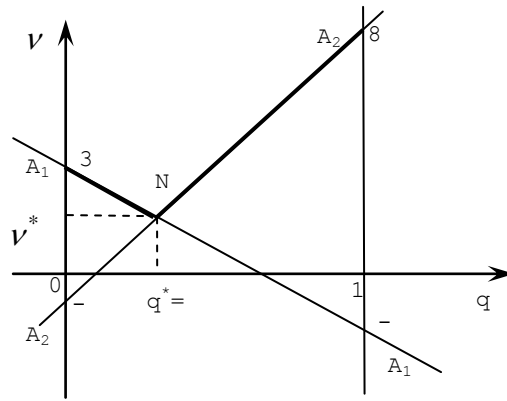


Рисунок 11 - Решение игры для второго игрока

Низшая точка верхней огибающей N определяет решение второго игрока. Для нахождения её координат необходимо решить систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} -2p + 3(1-p) = v \\ 8p - (1-p) = v \end{cases} \Rightarrow N(4/14; 22/14) \Rightarrow \bar{Q}^* = \left(\frac{2}{7}; \frac{5}{7}; 0 \right), v_B = 1,57.$$

Учтем, что решалась игра B , поэтому цена игры A будет равна $v_A = 15 \cdot v_B$, т.е. $v_A = 15 \cdot 1,57 = 23,55$.

Ответ: $\bar{P}^* = \left(\frac{9}{14}; \frac{5}{14} \right)$, $\bar{Q}^* = \left(\frac{2}{7}; \frac{5}{7}; 0 \right)$, $v = 23,55$.

Пример 4. Решить игру с матрицей выигрышей $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 6 \\ -1 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Проверим, есть ли седловая точка и заведомо невыгодные (мажорируемые) стратегии.

Нижняя цена игры $\alpha = \max\{2; -2; -1; 4\} = 4$, верхняя цена игры $\beta = \min\{5; 6\} = 5$. $\alpha < \beta$, следовательно, седловой точки нет. Решение ищем среди смешанных стратегий.

Мажорируемых строчек и столбцов нет.

Решение начинаем с игрока, у которого ровно две стратегии. В данном случае, со второго игрока. Для него ищем смешанную стратегию $\bar{Q} = (q; 1-q)$, где $0 \leq q \leq 1$.

Строим четыре прямых, изображающих средние проигрыши второго игрока, когда первый игрок выбирает одну из четырех своих чистых стратегий (ри-

сунок 12): $A_1A_1: v = 5q + 2(1-q)$,
 $A_2A_2: v = -2q + 6(1-q)$,
 $A_3A_3: v = -q + 5(1-q)$
 $A_4A_4: v = 4q + 4(1-q)$.

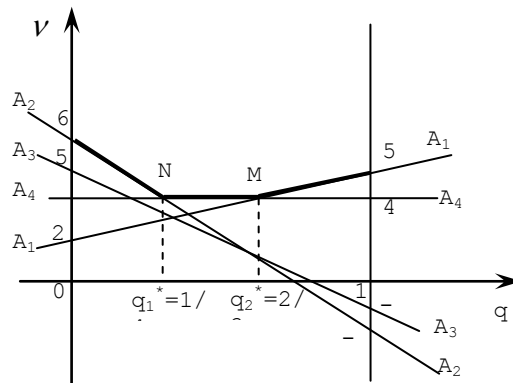


Рисунок 12 - Решение игры для второго игрока

Верхняя огибающая в данном случае состоит из трех кусков: A_2NMA_1 . Нижних точек верхней огибающей несколько – они составляют отрезок NM . Значит, у второго игрока множество оптимальных стратегий. Найдем координаты крайних точек: N как пересечение второй и четвертой прямых; M как пересечение первой и четвертой.

$$\begin{cases} -2q + 6(1 - q) = v \\ 4q + 4(1 - q) = v \end{cases} \Rightarrow N(1/4; 4) \Rightarrow \bar{Q}_1^* = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right), v = 4.$$

$$\begin{cases} 5q + 2(1 - q) = v \\ 4q + 4(1 - q) = v \end{cases} \Rightarrow M(2/3; 4) \Rightarrow \bar{Q}_2^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right), v = 4.$$

В итоге, оптимальное решение второго игрока:

$$\bar{Q}^* = t \cdot \bar{Q}_1^* + (1 - t) \cdot \bar{Q}_2^*, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Для первого игрока оптимальной стратегией будет чистая четвертая A_4 , т.к. все низшие точки верхней огибающей лежат на четвертой прямой, она и будет единственной активной стратегией в смешанной стратегии первого игрока, а это фактически означает чистую A_4 .

Ответ: $A_4; \bar{Q}^* = t \cdot \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right) + (1 - t) \cdot \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right), \quad 0 \leq t \leq 1; v = 4.$

Задания для решения в аудитории

1. Решить задачи теории игр графическим методом.

Пусть игра задана матрицей. Найти оптимальные стратегии игроков и определить цену игры.

$$a) C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$b) C = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 9 & 6 \\ 6 & 8 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 7 & -4 \\ -2 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

1.5. Решение матричных игр методами линейного программирования

Ранее были рассмотрены случаи, когда хотя бы у одного из игроков в наличии две стратегии. В случае игры $m \times n$, где у обоих игроков больше двух стратегий, используются методы линейного программирования. Для матричной игры, платёжная матрица которой

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

и нижняя и верхняя цены не совпадают: $\alpha < \beta$, определим такие значения вероятностей выбора стратегий для игрока A (p_1, p_2, \dots, p_m) и для игрока B (q_1, q_2, \dots, q_n), при которых игроки достигали бы своего максимального среднего гарантированного выигрыша.

Оптимальная стратегия S_A^* должна обеспечивать нам выигрыш, не меньший v , при любом поведении противника, и выигрыш, равный v , при его оптимальном поведении (стратегия S_B^*). Аналогично стратегия S_B^* должна обеспечивать противнику проигрыш, не больший v , при любом нашем поведении и равный v при нашем оптимальном поведении (стратегия S_A^*).

Получаем ряд условий:

$$\text{Для первого игрока: } \begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq V \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \geq V \\ \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \geq V \\ p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1 \\ p_1 \geq 0; p_2 \geq 0; \dots; p_m \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{Для второго игрока: } \begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \leq V \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n \leq V \\ \dots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}q_n \leq V \\ q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1 \\ q_1 \geq 0; q_2 \geq 0; \dots; q_n \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

Величина цены игры v в данном случае нам неизвестна; будем считать, что она равна некоторому положительному числу. Полагая так, мы не нарушаем общности рассуждений; для того чтобы было $v > 0$, очевидно, достаточно, чтобы все элементы матрицы $\|a_{ij}\|$ были неотрицательными. Этого всегда можно добиться, прибавляя к элементам $\|a_{ij}\|$ достаточно большую положительную величину L ; при этом цена игры увеличится на L , а решение не изменится.

Разделим обе части каждого выражения на V . Величину p_i/V обозначим через y_i , а q_j/V – через x_j .

Для игрока B необходимо найти минимальную цену игры (V). Следовательно, значение I/V должно стремиться к максимуму.

Целевая функция задачи примет вид:

$$F_{max} = \frac{I}{V} = x_1 + x_2 + \dots + x_n \rightarrow \max, \quad x_i = \frac{q_i}{V} \geq 0. \quad (9)$$

Система ограничительных неравенств для игрока B :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq I; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq I; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq I; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots; x_n \geq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Для игрока A необходимо найти максимальную цену игры (V). Следовательно, значение I/V должно стремиться к минимуму, поэтому целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$Z_{min} = \frac{I}{V} = y_1 + y_2 + \dots + y_m \rightarrow \min, \quad y_i = \frac{p_i}{V} \geq 0. \quad (11)$$

Система ограничительных неравенств для игрока A :

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq I; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq I; \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq I; \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; \dots; y_m \geq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Для решения задач линейного программирования используется симплекс-метод. При этом, как видно из выражений (10), (11), задачи линейного программирования для двух игроков являются взаимно двойственными.

В результате решения определяются значения целевых функций (для обо-

их игроков эти значения совпадают), а также значения переменных x_i и y_j .

Величина V^* определяется по формуле: $V^* = 1/Z^*$

Значения вероятностей выбора стратегий определяются:

для игрока A : $p_i = y_i \cdot V^*$; для игрока B : $q_i = x_i \cdot V^*$.

Для определения цены игры V из величины V^* необходимо вычесть число L (если перед решением задачи такое преобразование имело место).

Пример. Найти решение игры симплекс-методом, если платежная матрица имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Для игрока A оптимальная стратегия S_A^* должна обеспечивать выигрыш, не меньший v , при любом поведении противника. Аналогично стратегия S_B^* должна обеспечивать противнику проигрыш, не больший v , при любом поведении игрока A .

<p>Для игрока B</p> $\begin{cases} q_1 + 0q_2 + 4q_3 \leq V \\ 2q_1 + 3q_2 + q_3 \leq V \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ q_1 \geq 0; q_2 \geq 0; q_3 \geq 0 \end{cases}$	<p>Для игрока A</p> $\begin{cases} p_1 + 2p_2 \geq V \\ 0p_1 + 3p_2 \geq V \\ 4p_1 + p_2 \geq V \\ p_1 + p_2 = 1 \\ p_1 \geq 0; p_2 \geq 0 \end{cases}$
--	--

Все элементы матрицы $\|a_{ij}\|$ неотрицательные, поэтому прибавлять положительную величину L ко всем ее элементам нет необходимости; цена игры будет положительной величиной.

Разделим обе части неравенств на V .

<p>Для игрока B</p> $\begin{cases} x_1 + 4x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$ <p>$F_{max} = 1/V = x_1 + x_2 + x_3$</p>	<p>Для игрока A</p> $\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ 3y_2 \geq 1 \\ 4y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0 \end{cases}$ <p>$Z_{min} = 1/V = y_1 + y_2$</p>
--	--

Составим симплекс-таблицы

$f \backslash b$		y_3	y_4	y_5	Z_{min}
	$f \backslash b$	x_1	x_2	x_3	b_i
y_1	x_4	1	0	4	1
y_2	x_5	2	3	1	1
F_{max}	$-c_j$	-1	-1	-1	0

$f \backslash b$		y_2	y_4	y_5	Z_{min}
	$f \backslash b$	x_5	x_2	x_3	b_i
y_1	x_4	-1/2	-3/2	7/2	1/2
y_3	x_1	1/2	3/2	1/2	1/2
F_{max}	$-c_j$	1/2	1/2	-1/2	1/2

$f \backslash b$		y_2	y_4	y_1	Z_{min}
	$f \backslash b$	x_5	x_2	x_4	b_i
y_5	x_3	-1/7	-3/7	2/7	1/7
y_3	x_1	4/7	12/7	-1/7	3/7
F_{max}	$-c_j$	3/7	2/7	1/7	4/7

Оптимальные решения:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3/7	0	1/7	0	0
y_3	y_4	y_5	y_1	y_2
0	2/7	0	1/7	3/7

Откуда: $V = \frac{1}{Z} = \frac{1}{F} = \frac{7}{4}$; $q_i = V \cdot x_i \rightarrow (q_1 \ q_2 \ q_3) = \left(\frac{3}{4} \ 0 \ \frac{1}{4} \right)$;

$$p_j = V \cdot y_j \rightarrow (p_1 \ p_2) = \left(\frac{1}{4} \ \frac{3}{4} \right).$$

Задания для решения в аудитории

Дана матрица игры. Привести игру к задаче линейного программирования.

Решить игру в смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Молочный комбинат «Ставропольский» планирует выпуск двух видов новой продукции: питьевой биоогурт и пудинг сливочный. Спрос на эти продукты не определен, но можно предположить, что он принимает одно из двух состояний: хороший и удовлетворительный. В зависимости от этих состояний прибыль комбината различна и определяется матрицей A : $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти оптимальное соотношение между объемами выпуска каждого из продуктов, при котором комбинату гарантирована средняя прибыль при любом состоянии спроса.

3. Фермер, имеющий ограниченный участок земельных угодий может засадить его тремя различными культурами: A_1, A_2, A_3 . Урожай этих культур зависит главным образом о погоды, которая может находиться так же в трех различных состояниях B_1, B_2, B_3 .

Фермер имеет информацию об урожайности этих культур при трех различных состояниях погоды, которая отражена в матрице H' :

Виды культур	Возможные состояния погоды			Цена С
	Засуха B_1	Нормальная B_2	Дождливая B_3	
A_1	20	5	15	2
A_2	7,5	12,5	5	4
A_3	0	7,5	10	8

Необходимо определить пропорции, в которых фермер должен засеять имеющийся участок земли, чтобы максимизировать свой доход вне зависимости от того, какие погодные условия будут реализованы.

4. Предприятие может выпускать четыре вида продукции, получая при этом прибыль. Ее величина определяется состоянием спроса, который может находиться в одном из четырех состояний.

Платежная матрица характеризует величину прибыли, которую получит предприятие, если будет выпускать i -ый вид продукции ($i = 1, 2, 3, 4$) при j -ом

состоянии спроса ($j = 1, 2, 3, 4$):

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Необходимо определить оптимальные пропорции выпускаемых предприятием видов продукции, продажа которой обеспечила бы ему максимально возможную выручку вне зависимости от того, какое состояние спроса будет реализовано.

2. ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Геометрический метод решения задачи нелинейного программирования

В общем виде задача нелинейного программирования состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (13)$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют ограничениям

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i & (i = \overline{1, k}), \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i & (i = \overline{k+1, m}), \end{cases} \quad (14)$$

где f и g_i — некоторые известные функции n переменных, а b_i — заданные числа.

Здесь имеется в виду, что в результате решения задачи будет определена точка $X^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ координаты которой удовлетворяют соотношениям (14) и такая, что для всякой другой точки $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, удовлетворяющей условиям (14), выполняется неравенство

$$f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad [f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n)].$$

Если f и g_i — линейные функции, то задача (13), (14) является задачей линейного программирования.

Соотношения (14) образуют систему ограничений и включают в себя условия неотрицательности переменных, если такие условия имеются. Условия неотрицательности переменных могут быть заданы и непосредственно.

В евклидовом пространстве E_n система ограничений (14) определяет область допустимых решений (ОДР) задачи. В отличие от задачи линейного программирования для нелинейного случая *ОДР не всегда является выпуклой и может быть даже разрывной.*

Если определена область допустимых решений, то нахождение решения задачи (13), (14) сводится к определению такой точки этой области, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = h$. *Указанная точка может находиться как на границе области допустимых решений, так и внутри нее.*

Процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования (13), (14) с использованием ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Находят область допустимых решений задачи, определяемую соотношениями (14) (если она пуста, то задача не имеет решения).

2. Строят гиперповерхность $f = (x_1; x_2; \dots; x_n) = h$ уровня h .

3. Определяют гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции (13) сверху (снизу) на множестве допустимых решений.

4. Находят точку области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, и определяют в ней значение функции (13).

Пример 1. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \quad (15)$$

при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases} \quad (16)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (17)$$

Решение. Областью допустимых решений задачи (15) — (17) является треугольник ABC (рисунок 13).

Полагая значение целевой функции (15) равным некоторому числу h , получаем линии уровня, а именно окружности $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = h$ с центром $E(3; 4)$ и радиусом \sqrt{h} . С увеличением (уменьшением) числа h значения функции F соответственно увеличиваются (уменьшаются).

Проводя из точки E окружности разных радиусов, видим, что минимальное значение целевая функция принимает в точке D , в которой окружность касается области решений.

Для определения координат этой точки воспользуемся равенством $k_L = k_{кас}$ угловых коэффициентов прямой $10x_1 - x_2 = 8$ и касательной к окружности в точке D .

Из уравнения прямой $x_2 = 10x_1 - 8$ видим, что ее угловой коэффициент в точке D равен $k_L = 10$. Угловой же коэффициент касательной к окружности в точке D определим как значение производной функции x_2 от переменной x_1 в этой точке.

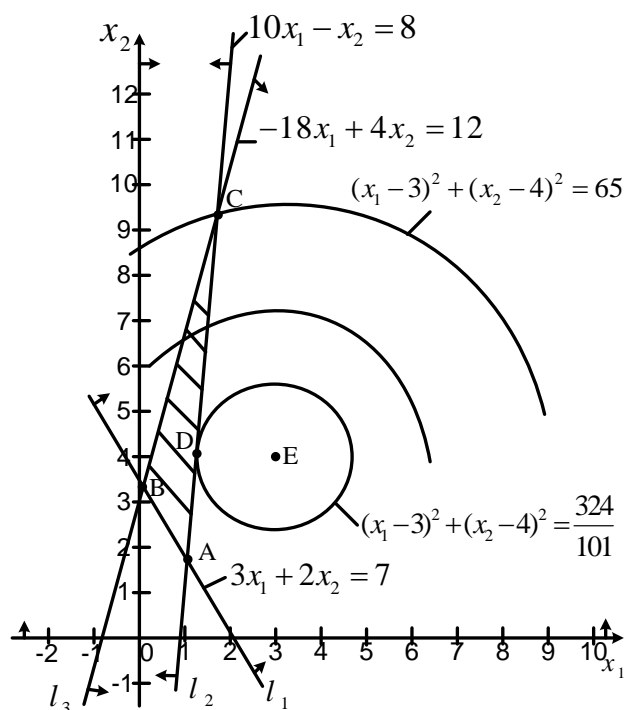


Рисунок 13 - Интерпретация решения задачи из примера 1

Рассматривая x_2 как неявную функцию переменной x_1 и дифференцируя уравнение окружности, получим

$$2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)x'_2 = 0.$$

откуда

$$x'_2 = k_{кас} = \frac{-(x_1 - 3)}{(x_2 - 4)}.$$

Приравняв найденное выражение числу 10, получаем одно из уравнений для определения координат точки E : $10(x_2 - 4) = -x_1 + 3$.

Присоединяя к нему уравнение ограничивающей прямой, на которой лежит точка E , получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43; \\ 10x_1 - x_2 = 8, \end{cases} \text{ откуда } x_1^* = \frac{123}{101}; \quad x_2^* = \frac{422}{101}.$$

$$\text{Таким образом, } F_{min} = \left(\frac{123}{101} - 3\right)^2 + \left(\frac{422}{101} - 4\right)^2 = \frac{324}{101}.$$

Как видно из рисунка 13, максимальное значение целевая функция принимает в точке $C(2;12)$. Ее координаты определены путем решения системы уравнений прямых, на пересечении которых находится точка C .

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 8, \\ -18x_1 + 4x_2 = 12. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 12. \end{cases}$$

Таким образом, максимальное значение функции

$$F_{max} = (2 - 3)^2 + (12 - 4)^2 = 1 + 64 = 65.$$

Пример 2. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$F = 3x_1 + 4x_2 \quad (18)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 25, \\ x_1 x_2 \geq 4, \end{cases} \quad (19)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (20)$$

Решение. Область решений задачи (18) — (20) изображена на рисунке 14. На этом рисунке построены две линии уровня, представляющие собой прямые. Из рисунка 2 видно, что максимальное значение целевая функция задачи принимает в точке E , в которой прямая касается окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$, а минимальное в точке D , где прямая касается гиперболы $x_1 x_2 = 4$.

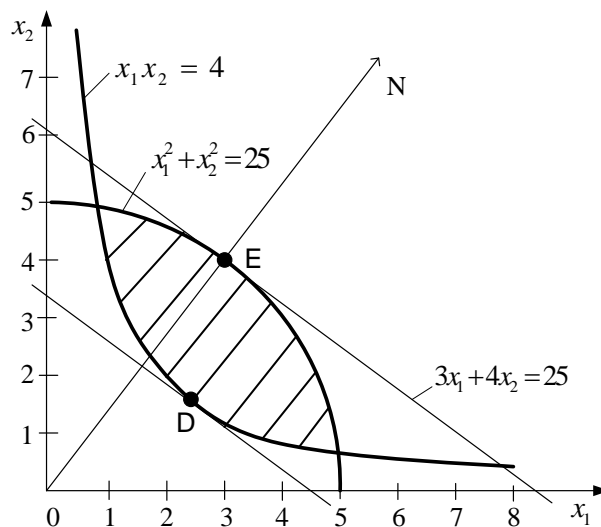


Рисунок 14 - Интерпретация решения задачи из примера 2

Для определения координат точки E воспользуемся равенством $k_F = k_{кас}$ угловых коэффициентов прямой $3x_1 + 4x_2 = h$, (где h — некоторая постоянная) и касательной к окружности в точке E .

Для углового коэффициента прямой k_F получим

$$x_2 = \frac{h}{4} - \frac{3}{4}x_1, \text{ откуда } k_F = -3/4.$$

Для определения углового коэффициента $k_{кас}$ касательной к окружности дифференцируем уравнение окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$ как неявную функцию переменной x_1 , получим

$$2x_1 + 2x_2x_2' = 0 \text{ или } x_2' = -x_1/x_2.$$

Приравнявая $k_F = k_{кас}$, получаем одно из уравнений для определения координат точки E : $x_1/x_2 = 3/4$. В качестве второго уравнения возьмем уравнение ограничивающей окружности. Таким образом, для определения координат точки E имеем систему

$$\begin{cases} x_1 = 3/4 x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3/4 x_2 \\ (9/16 + 1)x_2^2 = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \pm 3 \\ x_2^2 = \pm 4 \end{cases}.$$

С учетом неотрицательности переменных $x_1^* = 3$; $x_2^* = 4$.

Значит, $F_{max} = 3^2 + 4^2 = 25$.

Для определения координат точки D также воспользуемся равенством $k_F = k_{кас}$ угловых коэффициентов прямой $3x_1 + 4x_2 = h$ и касательной, теперь уже к гиперболе $x_1x_2 = 4$ в точке D .

Дифференцируя уравнение $x_1x_2 = 4$ по переменной x_1 , получим

$$x_2 + x_1x_2' = 0 \text{ или } x_2' = -x_2/x_1.$$

Откуда,

$$k_F = k_{кас}; \quad x_2/x_1 = 3/4.$$

В результате, для определения координат точки D имеем систему

$$\begin{cases} x_1 = 4/3 x_2 \\ x_1x_2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4/3 x_2 \\ 4/3 x_2^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4/3 x_2 \\ x_2^2 = 1/3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \pm 4/(3\sqrt{3}) \\ x_2 = \pm 1/\sqrt{3} \end{cases}.$$

С учетом неотрицательности переменных $x_1^* = \frac{4}{3\sqrt{3}}$; $x_2^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Значит, $F_{min} = 3 \frac{4}{3\sqrt{3}} + 4 \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти максимальное значение функции $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_2 \leq 4. \end{cases}$$

2. Найти максимальное и минимальное значения функции $F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8. \end{cases}$$

3. Найти максимальное значение функции $F = x_1 x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12. \end{cases}$$

4. Найти минимальное значение функции $F = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2$ при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4. \end{cases}$$

5. Найти максимальное значение функции $F = 4x_1 + 3x_2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \geq 0, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

6. Найти максимальное значение функции $F = x_1 x_2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10. \end{cases}$$

2.2. Выпуклое программирование

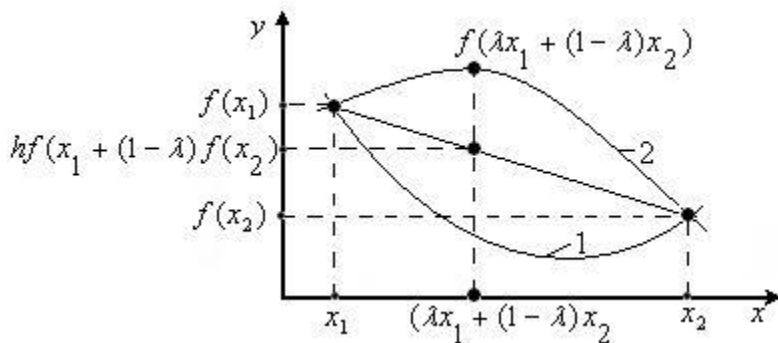
2.2.1. Краткие теоретические сведения

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вниз** (просто выпуклой) на множестве X , если для любых $x_1, x_2 \in X$ и любых $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вверх** (вогнутой) на множестве X , если для любых $x_1, x_2 \in X$ и любых $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$



1 - Выпуклая вниз
(выпуклая) на множестве X
функция;

2 - Выпуклая вверх
(вогнутая) на множестве X
функция.

Задача выпуклого программирования формулируется так. Требуется найти вектор $x \in R^n$, доставляющий **выпуклой вверх** дифференцируемой функции

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max \quad (21)$$

максимум на множестве допустимых решений, заданных ограничениями

$$\varphi_i(x) \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m, \quad (22)$$

у которых все $\varphi_i(x), (i = 1, 2, \dots, m)$ — **выпуклые вниз** дифференцируемые функции.

Функцией Лагранжа задачи выпуклого программирования (21)-(22) называется функция

$$L(x, y) = f(x) + (y, (b - \varphi(x))) = f(x) + \sum_{i=1}^m y_i (b_i - \varphi_i(x)), \quad x \in R^n, y \in R^m, \quad (23)$$

при этом координаты y_1, y_1, \dots, y_m вектора $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m)^T \in R^m$ называются **множителями Лагранжа** для задачи выпуклого программирования (21)-(22).

Говорят, что задача выпуклого программирования (21)-(22) удовлетворяет **условию регулярности**, если существует хотя бы одна внутренняя точка множества допустимых решений, определяемого неравенствами (22) [т. е. такая точка $x \in R^n$, что $\varphi_i(x) < b_i, (i = 1, 2, \dots, m)$].

Точка $(x^*, y^*) \in R^{n+m}$ ($x^* \in R^n, y^* \in R^m$) называется седловой точкой функ-

ции $L(x, y)$, если для всех $x \in R^n, y \in R_+^m$

$$L(x, y^*) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x^*, y), \quad (24)$$

(максимум по x и минимум по y).

2.2.2. Теорема Куна — Таккера

Если задача на тах выпуклого программирования (21)-(22) удовлетворяет условию регулярности, то точка $x^* \in R^n$ является оптимальным решением этой задачи тогда и только тогда, когда существует такой вектор

$$y^* = (y_1^* \quad y_2^* \quad \dots \quad y_m^*)^T \in R_+^m$$

с неотрицательными координатами, что точка $(x^*, y^*) \in R^{n+m}$ является седловой точкой (24) функции Лагранжа данной задачи [1].

Условия Куна — Таккера в дифференциальной форме. Если функция Лагранжа $L(x, y)$ является выпуклой вверх по x , выпуклой вниз по y и непрерывно дифференцируемой по всем $x_j, (j = 1, 2, \dots, n)$ и $y_i, (i = 1, 2, \dots, m)$, то для того чтобы пара $x^* \in R^n, y^* \in R^m$ была седловой точкой функции Лагранжа $L(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\left. \frac{\partial L(x, y)}{\partial x_j} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m y_i \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (25)$$

$$x_j^* \left. \frac{\partial L(x, y)}{\partial x_j} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = x_j^* \left(\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m y_i \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right) \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (26)$$

$$\left. \frac{\partial L(x, y)}{\partial y_i} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = \left. b_i - \varphi_i(x) \right|_{x=x^*} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (27)$$

$$y_i^* \left. \frac{\partial L(x, y)}{\partial y_i} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = y_i^* \left(\left. b_i - \varphi_i(x) \right) \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (28)$$

$$x_j^* \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad y_i^* \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (29)$$

Покажем, что частным случаем теоремы Куна-Таккера являются условия экстремумов двойственной задачи линейного программирования.

Используя матричную запись, где x, y, c, b - вектор-столбцы, запишем задачу линейного программирования на максимум

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c^T x \rightarrow \max; \quad \varphi(x) \leq b \rightarrow Ax \leq b.$$

Функция Лагранжа (23) в этом случае примет вид

$$L(x, y) = c^T x + y^T (b - Ax), \quad x \in R^n, y \in R^m. \quad (30)$$

Тогда на основании (25)-(29) и (30) получим условия оптимального плана

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L(x, y)}{\partial x_j} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} \leq 0; & \quad \rightarrow \quad \left. (c^T - y^T A) \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} \leq 0^T; \quad \rightarrow \quad A^T y \geq c \Big|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}}; \\ x_j^* \left. \frac{\partial L(x, y)}{\partial x_j} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = 0; & \quad \rightarrow \quad \left. (c^T - y^T A)x = 0 \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}}; \quad \rightarrow \quad c^T x = y^T Ax \Big|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}}; \\ \left. \frac{\partial L(x, y)}{\partial y_i} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} \geq 0; & \quad \rightarrow \quad b - Ax \geq 0 \Big|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}}; \quad \rightarrow \quad Ax \leq b \Big|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}}; \\ y_i^* \left. \frac{\partial L(x, y)}{\partial y_i} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = 0; & \quad \rightarrow \quad y^T (b - Ax) = 0 \Big|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}}; \quad \rightarrow \quad b^T y = y^T Ax \Big|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что в седловой точке двойственной задачи (x^*, y^*) достигается максимум по x и минимум по y , причем эти экстремумы равны

$$c^T x = b^T y = y^T Ax \Big|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}}.$$

2.3. Численные методы

В общем случае система условий Куна — Таккера в дифференциальной форме представляет собой *систему нелинейных уравнений*, отыскание точных решений которой, как правило, затруднительно и не всегда возможно. Кроме того, задача нелинейного программирования, может иметь несколько локальных экстремумов, а область допустимых решений (ОДР) может быть невыпуклой и даже состоять из нескольких несвязанных областей.

Поэтому на практике теорема Куна-Таккера используется редко, а для приближенного решения задач нелинейного программирования используются **численные методы**. Рассмотрим несколько таких методов для задач выпуклого программирования.

2.3.1. Метод возможных направлений

Основная идея метода такова. В качестве начального приближения к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (21)-(22)

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max; \quad \varphi_i(x) \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

выбирается некоторая внутренняя точка $x^{(0)}$ множества допустимых

решений [т. е. все ограничения (22) в этой точке должны выполняться как строгие неравенства].

Далее строится последовательность

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)} e^{(k)}, k = 1, 2, 3... \quad (31)$$

приближений к точке максимума целевой функции $f(x)$ на множестве допустимых решений.

Вектор $e^{(k)}$, определяющий направление перемещения из точки $x^{(k)}$ в точку $x^{(k+1)}$ (на k -м шаге метода) должен удовлетворять двум требованиям.

1. При достаточно малых $h^{(k)}$ точка $x^{(k+1)}$, определяемая формулой (31), должна принадлежать множеству допустимых решений (т. е. вектор $e^{(k)}$ должен задавать *возможное направление*). В частности, если точка $x^{(k)}$ является граничной точкой множества допустимых решений, то вектор $e^{(k)}$ должен быть направлен внутрь этого множества.

2. При достаточно малых $h^{(k)}$ вектор $e^{(k)}$ должен задавать направление возрастания целевой функции $f(x)$.

Величина шага $h^{(k)}$ смещения в (31) выбирается из условия наибольшего роста целевой функции $f(x)$ при перемещении из точки $x^{(k)}$ в точку $x^{(k+1)}$ с учетом того, что новое приближение $x^{(k+1)}$ должно оставаться во множестве допустимых решений.

Если очередное приближение $x^{(k)}$ является внутренней точкой множества допустимых решений [т. е. в этой точке все ограничения (22) выполняются как строгие неравенства], то вектор $e^{(k)}$ можно выбрать совпадающим с градиентом

$$\nabla f(x^{(k)}) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{array} \right) \Bigg|_{x=x^{(k)}}$$

целевой функции $f(x)$ [тогда $e^{(k)} = \text{grad } f(x^{(k)})$ будет указывать направление наискорейшего возрастания функции $f(x)$ в точке $x^{(k)}$].

Если же $x^{(k)}$ является граничной точкой множества допустимых реше-

ний, то некоторые из неравенств (22) в точке $x^{(k)}$ обращаются в равенства. В этом случае движение в направлении градиента может вывести за пределы множества допустимых решений.

В этом случае возможное направление

$$e^{(k)} = (e_1^{(k)} \quad e_2^{(k)} \quad \dots \quad e_n^{(k)})^T$$

возрастания целевой функции $f(x)$ в точке $x^{(k)}$ выбирается так, чтобы выполнялись следующие условия.

1. Угол между вектором $e^{(k)}$ и вектором $\nabla f(x^{(k)})$ должен быть как можно меньшим.

2. Для каждого из ограничений $i = i_1, i_2, \dots, i_n$, активных в точке $x^{(k)}$ (т. е. обращающихся в точке $x^{(k)}$ в строгие равенства), угол между вектором $e^{(k)}$ и внешней нормалью к гиперплоскости

$$\pi_i = \left\{ x \in R^n \mid \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} x_j = b_i \right\},$$

касательной к границе множества допустимых решений в точке $x^{(k)}$, должен быть не меньше $\pi/2$ (т. е. вектор $e^{(k)}$ должен быть направлен внутрь множества допустимых решений задачи).

3. Вектор $e^{(1)}$ должен быть ограниченным — поскольку направление определяется с точностью до положительного множителя, данное условие обеспечивает однозначность выбора $e^{(1)}$.

Эти условия приводят к постановке следующей задачи:

$$z = (\nabla f(x^{(k)}), e^{(k)}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} e_j^{(k)} \rightarrow \max, \quad (32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla \varphi_i(x^{(k)}), e^{(k)}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i(x^{(k)})}{\partial x_j} e_j^{(k)} \leq 0, \quad i = i_1, i_2, \dots, i_q, \\ \sum_{j=1}^n |e_j^{(k)}| \leq 1. \end{array} \right. \quad (33)$$

Данную задачу можно свести к задаче линейного программирования, для этого нужно представить переменные $e_j^{(k)}$ (которые по смыслу задачи (32)-(33) могут принимать значения произвольного знака) как разности $e_j^{(k)} = e_{j+}^{(k)} - e_{j-}^{(k)}$ новых неотрицательных переменных $e_{j+}^{(k)} \geq 0$, $e_{j-}^{(k)} \geq 0$ и добавить условия $e_{j+}^{(k)} e_{j-}^{(k)} = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ (т.е. или $e_{j+}^{(k)} = 0$ или $e_{j-}^{(k)} = 0$)

При этом

$$|e_1^{(1)}| = e_{1+}^{(1)} + e_{1-}^{(1)} \quad |e_2^{(1)}| = e_{2+}^{(1)} + e_{2-}^{(1)},$$

и задача (32)-(33) примет вид

$$z = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} (e_{j+}^{(k)} - e_{j-}^{(k)}) \rightarrow \max, \quad (34)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i(x^{(k)})}{\partial x_j} (e_{j+}^{(k)} - e_{j-}^{(k)}) \leq 0, & i = i_1, i_2, \dots, i_q, \\ \sum_{j=1}^n e_{j+}^{(k)} + \sum_{j=1}^n e_{j-}^{(k)} \leq 1, \end{cases} \quad (35)$$

$$e_{j+}^{(k)} e_{j-}^{(k)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (36)$$

$$e_{j+}^{(k)} \geq 0, \quad e_{j-}^{(k)} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (37)$$

Эту задачу после введения фиктивных переменных (для преобразования к предпочитаемому виду) можно решить симплексным методом. При этом для учета условий $e_{j+}^{(k)} e_{j-}^{(k)} = 0$ при вычислительной реализации симплексного метода необходимо следить за тем, чтобы не вводить в базис одновременно переменные $e_{j+}^{(1)}$ и $e_{j-}^{(1)}$ с одинаковым индексом j ($j = 1, 2, \dots, n$).

ПРИМЕР 1. Требуется найти приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования

$$f(x) = -(x_1 - 8)^2 - (x_2 - 8)^2 \rightarrow \max, \quad (38)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (39)$$

Для чего провести три первые итерации метода возможных направлений, выбрав в качестве начального приближения вектор

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Целевая функция представляет собой отрицательно-определенную квадратичную форму, которая во всей области определения является выпуклой вверх. Функции ограничений являются плоскостями.

Несложно убедиться в том, что исходная точка $x^{(0)}$ является *внутренней точкой* множества допустимых решений (39), поскольку все ограничения выполняются как строгие неравенства

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 8 < 15, \\ 1 + 8 < 10, \\ 1 > 0, \\ 8 > 0. \end{cases}$$

Очередное, *первое приближение* $x^{(1)}$ к оптимальному решению задачи выберем в направлении наискорейшего возрастания целевой функции:

$$e^{(0)} = \nabla f(x^{(0)}) = \left. \begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix} \right|_{x=x^{(0)}} = \begin{pmatrix} -2(1 - 8) \\ -2(8 - 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем границы шага смещения h в направлении $e^{(0)}$, при котором точка

$$x^{(1)} = x^{(0)} + he^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 14h \\ 8 \end{pmatrix}$$

будет оставаться во множестве допустимых решений. Запишем условия допустимости:

$$\begin{cases} 3(1 + 14h) + 8 \leq 15, \\ 1 + 14h + 8 \leq 10, \\ 1 + 14h \geq 0, \\ 8 \geq 0. \end{cases}$$

Решениями этой системы неравенств являются все $h \in [-1/14; 1/14]$. Выберем h из этого отрезка таким образом, чтобы значение целевой функции $f(x)$ в точке $x^{(1)} = x^{(0)} + he^{(0)}$ было максимальным.

Для этого найдем точку максимума функции

$$\Phi_0(h) = f(x^{(0)} + he^{(0)}) = -(1 + 14h - 8)^2 - (8 - 8)^2 = -(14h - 7)^2 = -49(2h - 1)^2$$

одной переменной h на отрезке $h \in [-1/14; 1/14]$.

Производная $\Phi_0'(h) = -49 \cdot 2(2h - 1) = -98(2h - 1)$ обращается в нуль в точке $h = 1/2$, положительна при $h > 1/2$ и отрицательна при $h < 1/2$, поэтому точка $h = 1/2$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_0(h)$, а максимум функции $\Phi_0(h)$ на отрезке $h \in [-1/14; 1/14]$ достигается в точке $h^{(0)} = 1/14$.

Таким образом, если выбрать шаг смещения $h^{(0)} = 1/14$ в направлении

$$e^{(0)} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

наискорейшего роста целевой функции $f(x)$, то при движении от точки

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

к точке

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(0)} e^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 + 14h^{(0)} \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

целевая функция возрастет наибольшим образом, а точка $x^{(1)}$ останется во множестве допустимых решений.

Итак, получили новое, первое приближение

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

к оптимальному решению задачи (38)-(39).

Переходим ко *второму шагу* метода возможных направлений.

Точка $x^{(1)}$ является *граничной точкой* множества допустимых решений; второе из ограничений (39) выполняется в этой точке как равенство, а остальные — как строгие неравенства:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 + 8 < 15, \\ 2 + 8 = 10, \\ 2 > 0, \\ 8 > 0. \end{cases}$$

Поэтому если двигаться в направлении

$$\nabla f(x^{(1)}) = \left. \begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix} \right|_{x=x^{(1)}} = \begin{pmatrix} -2(2 - 8) \\ -2(8 - 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

наискорейшего возрастания целевой функции, то новое приближение может выйти за границы области допустимых решений.

Поэтому возможное направление

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

возрастания целевой функции $f(x)$ в точке $x^{(1)}$ выберем так, чтобы оно являлось оптимальным решением задачи (32)-(33), которая в данном случае примет вид

$$z = (\nabla f(x^{(1)}), e^{(1)}) = 12e_1^{(1)} + 0e_2^{(1)} \rightarrow \max, \quad (40)$$

$$\begin{cases} (\nabla \varphi_2(x^{(1)}), e^{(1)}) = e_1^{(1)} + e_2^{(1)} \leq 0, \\ \sum |e_i^{(1)}| = |e_1^{(1)}| + |e_2^{(1)}| \leq 1. \end{cases} \quad (41)$$

Чтобы свести эту задачу к задаче линейного программирования, представим переменные $e_1^{(1)}$ и $e_2^{(1)}$ как разности новых неотрицательных переменных $e_{1+}^{(1)} \geq 0, e_{1-}^{(1)} \geq 0, e_{2+}^{(1)} \geq 0, e_{2-}^{(1)} \geq 0$:

$$e_1^{(1)} = e_{1+}^{(1)} - e_{1-}^{(1)}, \quad e_2^{(1)} = e_{2+}^{(1)} - e_{2-}^{(1)},$$

причем $e_{1+}^{(1)}e_{1-}^{(1)} = 0, e_{2+}^{(1)}e_{2-}^{(1)} = 0$.

При этом $|e_1^{(1)}| = e_{1+}^{(1)} + e_{1-}^{(1)}, |e_2^{(1)}| = e_{2+}^{(1)} + e_{2-}^{(1)}$,

и задача (40)-(41) примет вид

$$z = 12e_{1+}^{(1)} - 12e_{1-}^{(1)} \rightarrow \max, \quad (42)$$

$$\begin{cases} e_{1+}^{(1)} - e_{1-}^{(1)} + e_{2+}^{(1)} - e_{2-}^{(1)} \leq 0, \\ e_{1+}^{(1)} + e_{1-}^{(1)} + e_{2+}^{(1)} + e_{2-}^{(1)} \leq 1, \end{cases} \quad (43)$$

$$e_{1+}^{(1)}e_{1-}^{(1)} = 0, \quad e_{2+}^{(1)}e_{2-}^{(1)} = 0, \quad (44)$$

$$e_{1+}^{(1)} \geq 0, \quad e_{1-}^{(1)} \geq 0, \quad e_{2+}^{(1)} \geq 0, \quad e_{2-}^{(1)} \geq 0. \quad (45)$$

Будем решать эту задачу симплексным методом, введя предварительно дополнительные переменные s_1 и s_2 , чтобы преобразовать неравенства в равенства:

$$z = 12e_{1+}^{(1)} - 12e_{1-}^{(1)} \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} e_{1+}^{(1)} - e_{1-}^{(1)} + e_{2+}^{(1)} - e_{2-}^{(1)} + s_1 = 0, \\ e_{1+}^{(1)} + e_{1-}^{(1)} + e_{2+}^{(1)} + e_{2-}^{(1)} + s_2 = 1, \\ e_{1+}^{(1)}e_{1-}^{(1)} = 0, \\ e_{2+}^{(1)}e_{2-}^{(1)} = 0, \end{cases}$$

$$e_{1+}^{(1)} \geq 0, \quad e_{1-}^{(1)} \geq 0, \quad e_{2+}^{(1)} \geq 0, \quad e_{2-}^{(1)} \geq 0.$$

Для учета условий $e_{1+}^{(1)}e_{1-}^{(1)} = 0, e_{2+}^{(1)}e_{2-}^{(1)} = 0$ при вычислительной реализации симплексного метода будем следить за тем, чтобы не вводить в базис одновременно переменные $e_{j+}^{(1)}$ и $e_{j-}^{(1)}, (j=1,2)$.

Симплексные таблицы представлены ниже

	$e_{1+}^{(1)}$	$e_{1-}^{(1)}$	$e_{2+}^{(1)}$	$e_{2-}^{(1)}$	b_i
s_1	1	-1	1	-1	0
s_2	1	1	1	1	1
z_{max}	-12	12	0	0	0

	s_1	$e_{1-}^{(1)}$	$e_{2+}^{(1)}$	$e_{2-}^{(1)}$	b_i
$e_{1+}^{(1)}$	1	-1	1	-1	0
s_2	-1	2	0	2	1
z_{max}	12	0	12	-12	0

	s_1	$e_{1-}^{(1)}$	$e_{2+}^{(1)}$	s_2	b_i
$e_{1+}^{(1)}$	1/2	0	1	1/2	1/2
$e_{2-}^{(1)}$	-1/2	1	0	1/2	1/2
z_{max}	6	12	12	6	6

В результате мы получили оптимальное решение задачи (42)-(45)

$$e_{1+}^{(1)} = 1/2, \quad e_{1-}^{(1)} = 0, \quad e_{2+}^{(1)} = 0, \quad e_{2-}^{(1)} = 1/2.$$

Теперь легко найти оптимальное решение задачи (40)-(41):

$$e_1^{(1)} = e_{1+}^{(1)} - e_{1-}^{(1)} = 1/2, \quad e_2^{(1)} = e_{2+}^{(1)} - e_{2-}^{(1)} = 1/2.$$

Тем самым, мы получили направление очередного шага:

$$e_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Найдем границы шага смещения h в направлении $e^{(1)}$ при котором точка

$$x^{(2)} = x^{(1)} + he^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + h/2 \\ 8 - h/2 \end{pmatrix}$$

будет оставаться во множестве допустимых решений (39). Имеем:

$$\begin{cases} 3(2 + h/2) + 8 - h/2 \leq 15, \\ 2 + h/2 + 8 - h/2 \leq 10, \\ 2 + h/2 \geq 0, \\ 8 - h/2 \geq 0. \end{cases}$$

Точка $x^{(2)}$ остается во множестве допустимых решений при всех $h \in [-4; 1]$. Выберем h из этого отрезка таким образом, чтобы значение целевой функции $f(x)$ в точке $x^{(2)}$ было максимальным.

Для этого найдем точку максимума целевой функции (38)

$$\begin{aligned} \Phi_1(h) &= f(x^{(1)} + he^{(1)}) = -(2 + h/2 - 8)^2 - (8 - h/2 - 8)^2 = \\ &= (h/2 - 6)^2 - h^2/4 = -h^2/2 + 6h - 36 \end{aligned}$$

одной переменной h на отрезке $h \in [-4; 1]$.

Производная $\Phi_1'(h) = -h + 6$ обращается в нуль в точке $h = 6$, положительна при $h < 6$ и отрицательна при $h > 6$, поэтому точка $h = 6$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_1(h)$, а максимум функции $\Phi_1(h)$ на отрезке $h \in [-4; 1]$ достигается в точке $h^{(1)} = 1$.

Таким образом, если выбрать шаг смещения $h^{(1)} = 1$ в направлении

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

наискорейшего роста целевой функции $f(x)$, то при движении от точки

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

к точке

$$x^{(2)} = x^{(1)} + h^{(1)} e^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 + h^{(1)} / 2 \\ 8 - h^{(1)} / 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 / 2 \\ 15 / 2 \end{pmatrix}$$

целевая функция возрастет наибольшим образом, а точка $x^{(2)}$ останется во множестве допустимых решений.

Итак, получили очередное приближение

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 / 2 \\ 15 / 2 \end{pmatrix}$$

к оптимальному решению задачи (38)-(39).

Начинаем *третий шаг* метода возможных направлений.

Точка $x^{(2)}$ является граничной точкой множества допустимых решений: первых два ограничения (39) выполняются в этой точке как равенства, а последних два — как строгие неравенства:

$$\begin{cases} 3 \cdot 5 / 2 + 15 / 2 = 15, \\ 5 / 2 + 15 / 2 = 10, \\ 5 / 2 > 0, \\ 15 / 2 > 0. \end{cases}$$

Поэтому если двигаться в направлении

$$\nabla f(x^{(2)}) = \left. \begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix} \right|_{x=x^{(2)}} = \begin{pmatrix} -2(5/2 - 8) \\ -2(15/2 - 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

наискорейшего возрастания целевой функции, то новое приближение может выйти за границы области допустимых решений, т. е. направление

$$\nabla f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

не является возможным в точке

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 / 2 \\ 15 / 2 \end{pmatrix}.$$

Составим задачу линейного программирования (32)-(33) для определения возможного направления $e^{(2)}$:

$$z = (\nabla f(x^{(2)}), e^{(2)}) = 11e_{1+}^{(2)} - 11e_{1-}^{(2)} + e_{2+}^{(2)} - e_{2-}^{(2)} \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} (\nabla \varphi_1(x^{(2)}), e^{(2)}) = 3e_{1+}^{(2)} - 3e_{1-}^{(2)} + e_{2+}^{(2)} - e_{2-}^{(2)} \leq 0, \\ (\nabla \varphi_2(x^{(2)}), e^{(2)}) = e_{1+}^{(2)} - e_{1-}^{(2)} + e_{2+}^{(2)} - e_{2-}^{(2)} \leq 0, \\ e_{1+}^{(2)} + e_{1-}^{(2)} + e_{2+}^{(2)} + e_{2-}^{(2)} \leq 1, \\ e_{1+}^{(2)} e_{1-}^{(2)} = 0, \quad e_{2+}^{(2)} e_{2-}^{(2)} = 0, \\ e_{1+}^{(2)} \geq 0, \quad e_{1-}^{(2)} \geq 0, \quad e_{2+}^{(2)} \geq 0, \quad e_{2-}^{(2)} \geq 0. \end{cases}$$

Симплексные таблицы представлены ниже

	$e_{1+}^{(2)}$	$e_{1-}^{(2)}$	$e_{2+}^{(2)}$	$e_{2-}^{(2)}$	b_i
s_1	3	-3	1	-1	0
s_2	1	-1	1	-1	0
s_3	1	1	1	1	1
z_{max}	-11	11	-1	1	0

	s_2	$e_{1-}^{(2)}$	$e_{2+}^{(2)}$	$e_{2-}^{(2)}$	b_i
s_1	-3	0	-2	2	0
$e_{1+}^{(2)}$	1	-1	1	-1	0
s_3	-1	2	0	2	1
z_{max}	11	0	10	-10	0

	s_2	$e_{1-}^{(2)}$	$e_{2+}^{(2)}$	s_1	b_i
$e_{2-}^{(2)}$	-3/2	0	-1	1/2	0
$e_{1+}^{(2)}$	-1/2	-1	0	1/2	0
s_3	2	2	2	-1	1
z_{max}	-4	0	0	5	0

	s_3	$e_{1-}^{(2)}$	$e_{2+}^{(2)}$	s_1	b_i
$e_{2-}^{(2)}$	3/4	3/2	1/2	-1/4	3/4
$e_{1+}^{(2)}$	1/4	-1/2	1/2	1/4	1/4
s_2	1/2	1	1	-1/2	1/2
z_{max}	2	4	4	3	2

Оптимальное решение этой задачи равно

$$e_{1+}^{(2)} = 1/4, \quad e_{1-}^{(2)} = 0, \quad e_{2+}^{(2)} = 0, \quad e_{2-}^{(2)} = 3/4,$$

откуда находим направление очередного шага

$$e^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \end{pmatrix}.$$

Найдем границы шага смещения h в направлении $e^{(2)}$, при котором точка

$$x^{(3)} = x^{(2)} + he^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 + h/4 \\ 15/2 - 3h/4 \end{pmatrix}$$

будет оставаться во множестве допустимых решений. Имеем:

$$\begin{cases} 3(5/2 + h/4) + 15/2 - 3h/4 \leq 15 \\ 5/2 + h/4 + 15/2 - 3h/4 \leq 10 \\ 5/2 + h/4 \geq 0 \\ 15/2 - 3h/4 \geq 0. \end{cases}$$

Этой системе неравенств удовлетворяют все $h \in [0; 5]$. Выберем h из этого отрезка таким образом, чтобы значение целевой функции в точке $x^{(3)} = x^{(2)} + he^{(2)}$ было максимальным.

Для этого найдем точку максимума функции

$$\begin{aligned} \Phi_2(h) = f(x^{(2)} + he^{(2)}) &= -(5/2 + h/4 - 8)^2 - (15/2 - 3h/4 - 8)^2 = \\ &= -(h/4 - 11/2)^2 - (3h/4 + 1/2)^2 \end{aligned}$$

одной переменной h на отрезке $h \in [0; 5]$.

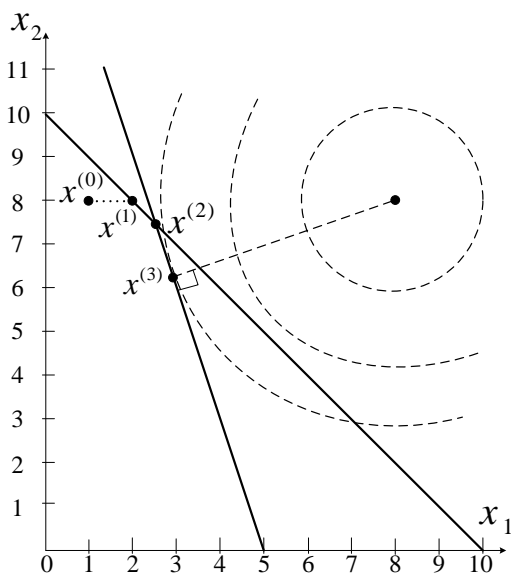
Производная $\Phi_2'(h) = (8 - 5h)/4$ обращается в нуль в точке $h = 8/5$, положительна при $h < 8/5$ и отрицательна при $h > 8/5$, поэтому точка $h = 8/5$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_2(h)$ и точкой локального максимума этой функции на отрезке $h \in [0; 5]$.

Получаем очередное приближение:

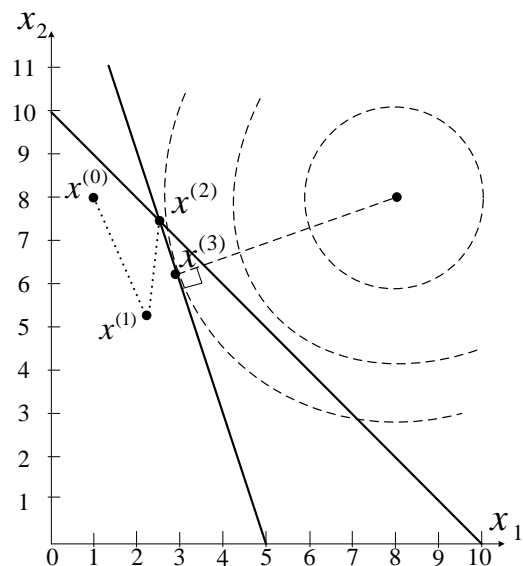
$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 5/2 + 2/5 \\ 15/2 - 6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/10 \\ 63/10 \end{pmatrix}.$$

Итерационный процесс метода возможных направлений иллюстрируется рисунком 15.

Заметим, что $x^{(3)}$ — это точное решение задачи (38)-(39).



а) метод возможных направлений



б) метод условного градиента

Рисунок 15 - Иллюстрация итерационных процессов

2.3.2. Метод условного градиента

Опишем метод условного градиента. Пусть $x^{(k)}$ — очередное приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (21)-(22) — такая точка $x^{(k)}$ множества допустимых решений, что

$$\nabla f(x^{(k)}) \neq 0.$$

Тогда в окрестности точки $x^{(k)}$ целевая функция $f(x)$ может быть представлена в виде

$$f(x) = f(x^{(k)}) + (\nabla f(x^{(k)}), (x - x^{(k)})) + o(\|x - x^{(k)}\|).$$

Будем максимизировать на допустимом множестве линейную функцию

$$f_k(x) = (\nabla f(x^{(k)}), (x - x^{(k)})), \quad (46)$$

которая является приближением разности $f(x) - f(x^{(k)})$ с точностью до величины $o(\|x - x^{(k)}\|)$.

Пусть $\tilde{x}^{(k)}$ — решение вспомогательной задачи максимизации функции (46) при ограничениях (22).

Следующее приближение $x^{(k+1)}$ к оптимальному решению исходной задачи (21)-(22) построим по формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)}(\tilde{x}^{(k)} - x^{(k)}), \quad (47)$$

в которой величину шага смещения $h^{(k)}$ выберем как

$$h^{(k)} = \min\{1; \tilde{h}^{(k)}\}, \quad (48)$$

где $\tilde{h}^{(k)}$ выбирается из условия наибольшего роста целевой функции $f(x)$ при перемещении из точки $x^{(k)}$ в точку

$$x^{(k)} + \tilde{h}^{(k)}(\tilde{x}^{(k)} - x^{(k)}).$$

Тогда, поскольку множество допустимых решений выпукло, $h^{(k)} \in [0; 1]$, точка $x^{(k+1)}$ (47) останется допустимым решением.

Отметим, что вспомогательная задача максимизации функции (46) при ограничениях (22) является также задачей выпуклого программирования. Процесс ее решение оказывается, однако, достаточно простым в случае, когда ограничения (22) являются линейными.

ПРИМЕР 2. Требуется найти приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (38)-(39) из примера 1, для чего провести три первые итерации метода условного градиента, выбрав в качестве начального приближения вектор

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Как было показано в примере 1, начальное приближение

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

является допустимым решением.

1-й шаг.

$$\nabla f(x^{(0)}) = \left. \begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix} \right|_{x=x^{(0)}} = \begin{pmatrix} -2(1 - 8) \\ -2(8 - 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поставим вспомогательную задачу максимизации функции (46) при ограничениях (39):

$$f_0(x) = (\nabla f(x^{(0)}), (x - x^{(0)})) = 14(x_1 - 1) + 0(x_2 - 8) = 14x_1 - 14 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Оптимальное решение этой задачи равно $\tilde{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Симплексные таблицы представлены ниже

	x_1	x_2	b_i
x_3	3	1	15
x_4	1	1	10
f_{max}	-14	0	-14

	x_3	x_2	b_i
x_1	1/3	1/3	5
x_4	-1/3	2/3	5
f_{max}	14/3	14/3	56

Выберем $\tilde{h}^{(0)}$ из условия наибольшего роста целевой функции $f(x)$ при перемещении из точки

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

в точку

$$x^{(0)} + \tilde{h}^{(0)}(\tilde{x}^{(0)} - x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \tilde{h}^{(0)} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 0 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4\tilde{h}^{(0)} \\ 8 - 8\tilde{h}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}\Phi_0(h) &= f\left(\begin{matrix} 1+4h^{(0)} \\ 8-8h^{(0)} \end{matrix}\right) = -(1+4h-8)^2 - (8-8h-8)^2 = \\ &= -16h^2 + 56h - 49 - 64h^2 = -80h^2 + 56h - 49.\end{aligned}$$

Производная $\Phi_0'(h) = -160h + 56$ обращается в нуль в точке $h = 56 / 160 = 7 / 20$, положительна при $h < 7 / 20$ и отрицательна при $h > 7 / 20$, поэтому точка $\tilde{h}^{(0)} = 7 / 20$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_0(h)$.

Величину шага смещения $h^{(0)}$ выберем как

$$h^{(k)} = \min\{1; \tilde{h}^{(k)}\} = \{1; 7 / 20\} = 7 / 20$$

и построим следующее приближение $x^{(1)}$ к оптимальному решению исходной задачи:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(0)}(\tilde{x}^{(0)} - x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{7}{20} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 \cdot 7 / 20 \\ 8-8 \cdot 7 / 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 / 5 \\ 26 / 5 \end{pmatrix}.$$

2-й шаг.

Градиент целевой функции в точке $x^{(1)}$ равен

$$\nabla f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix} \Big|_{x=x^{(1)}} = \begin{pmatrix} -2(12 / 5 - 8) \\ -2(26 / 5 - 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 / 5 \\ 28 / 5 \end{pmatrix}.$$

Поставим вспомогательную задачу максимизации функции (46) при ограничениях (39):

$$\begin{aligned}f_1(x) &= (\nabla f(x^{(1)}), (x - x^{(1)})) = \frac{56}{5} \left(x_1 - \frac{12}{5}\right) + \frac{28}{5} \left(x_2 - \frac{26}{5}\right) = \frac{56}{5} x_1 + \frac{28}{5} x_2 - 56 \rightarrow \max, \\ &\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{Оптимальное решение этой задачи равно } \tilde{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 / 2 \\ 15 / 2 \end{pmatrix}$$

Симплексные таблицы представлены ниже

Выберем $\tilde{h}^{(1)}$ из условия наибольшего роста целевой функции $f(x)$ при перемещении из точки

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 12 / 5 \\ 26 / 5 \end{pmatrix}$$

	x_1	x_2	b_i
x_3	3	1	15
x_4	1	1	10
f_{max}	-56/5	-28/5	-56

	x_3	x_2	b_i
x_1	1/3	1/3	5
x_4	-1/3	2/3	5
f_{max}	56/15	-28/15	0

	x_3	x_4	b_i
x_1	1/2	-1/2	5/2
x_2	-1/2	3/2	15/2
f_{max}	28/5	14/5	14

в точку

$$x^{(1)} + \tilde{h}^{(1)}(\tilde{x}^{(1)} - x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 12/5 \\ 26/5 \end{pmatrix} + \tilde{h}^{(1)} \begin{pmatrix} 5/2 - 12/5 \\ 15/2 - 26/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/5 + \tilde{h}^{(1)}/10 \\ 26/5 + 23\tilde{h}^{(1)}/10 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \Phi_1(h) = f \left(\begin{pmatrix} 12/5 + h/10 \\ 26/5 + 23h/10 \end{pmatrix} \right) &= -(12/5 + h/10 - 8)^2 - (26/5 + 23h/10 - 8)^2 = \\ &= -\left(\frac{h}{10} - \frac{28}{5} \right)^2 - \left(\frac{23h}{10} - \frac{14}{5} \right)^2. \end{aligned}$$

Производная

$$\Phi_1'(h) = -2 \left(\frac{h}{10} - \frac{28}{5} \right) \frac{1}{10} - 2 \left(\frac{23h}{10} - \frac{14}{5} \right) \frac{23}{10} = -\frac{1}{5} (53h - 70)$$

обращается в нуль в точке $h = 70/53$, положительна при $h < 70/53$ и отрицательна при $h > 70/53$, поэтому точка $\tilde{h}^{(1)} = 70/53$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_1(h)$.

Величину шага смещения $h^{(1)}$ выберем как

$$h^{(1)} = \min\{1; \tilde{h}^{(1)}\} = \min\{1; 70/53\} = 1$$

и построим следующее приближение $x^{(2)}$ к оптимальному решению исходной задачи:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + h^{(1)}(\tilde{x}^{(1)} - x^{(1)}) = x^{(1)} + \tilde{x}^{(1)} - x^{(1)} = \tilde{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}.$$

3-й шаг.

Градиент целевой функции в точке $x^{(2)}$ равен

$$\nabla f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix} \Big|_{x=x^{(2)}} = \begin{pmatrix} -2(5/2 - 8) \\ -2(15/2 - 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поставим вспомогательную задачу максимизации функции (46) при ограничениях (39):

$$f_2(x) = \left(\nabla f(x^{(2)}), (x - x^{(2)}) \right) = 11(x_1 - 5/2) + x_2 - 15/2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Оптимальное решение этой задачи равно $\tilde{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Симплексные таблицы представлены ниже

	x_1	x_2	b_i
x_3	3	1	15
x_4	1	1	10
f_{max}	-11	-1	-35

	x_3	x_2	b_i
x_1	1/3	1/3	5
x_4	-1/3	2/3	5
f_{max}	11/3	8/3	20

Выберем $\tilde{h}^{(2)}$ из условия наибольшего роста целевой функции $f(x)$ при перемещении из точки

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

в точку

$$x^{(2)} + \tilde{h}^{(2)}(\tilde{x}^{(2)} - x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} + \tilde{h}^{(2)} \begin{pmatrix} 5 - 5/2 \\ 0 - 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 + 5\tilde{h}^{(2)}/2 \\ 15/2 - 15\tilde{h}^{(2)}/2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \Phi_2(h) &= f \left(\begin{pmatrix} 5/2 + 5h/2 \\ 15/2 - 15h/2 \end{pmatrix} \right) = -(5/2 + 5h/2 - 8)^2 - (15/2 - 15h/2 - 8)^2 = \\ &= -\left(\frac{5h}{2} - \frac{11}{2} \right)^2 - \left(-\frac{15h}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 = -\left(\frac{5h}{2} - \frac{11}{2} \right)^2 - \left(\frac{15h}{2} + \frac{1}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Производная

$$\Phi_2'(h) = -2 \left(\frac{5h}{2} - \frac{11}{2} \right) \frac{5}{2} - 2 \left(\frac{15h}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{15}{2} = -\frac{5}{2} (50h - 8) = -5(25h - 4)$$

обращается в нуль в точке $h = 4/25$, положительна при $h < 4/25$ и отрицательна при $h > 4/25$, поэтому точка $\tilde{h}^{(2)} = 4/25$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_2(h)$.

Величину шага смещения $h^{(2)}$ выберем как

$$h^{(2)} = \min\{1; \tilde{h}^{(2)}\} = \min\{1; 4/25\} = 4/25$$

и построим следующее приближение к оптимальному решению исходной задачи:

$$x^{(3)} = x^{(2)} + h^{(2)}(\tilde{x}^{(2)} - x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} + \frac{4}{25} \begin{pmatrix} 5 - 5/2 \\ 0 - 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/10 \\ 63/10 \end{pmatrix}.$$

Задание для самостоятельного решения

Требуется найти максимальное значение функции

$$f(x_1; x_2) = nx_1^2 + 5x_2^2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 18; \\ 2x_1 + x_2 \leq 16; \\ x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0. \end{cases}, \quad \text{где } n \text{ — номер варианта.}$$

Вначале нужно проверить выполнение условия регулярности.

Затем нужно найти приближение к оптимальному решению задачи, для чего провести три первые итерации метода возможных направлений, а затем три первые итерации метода условного градиента, выбрав (для обоих методов) в качестве начального приближения вектор

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

После этого необходимо с помощью надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Excel проверить правильность решения задачи.

2.4.Использование надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Excel

ПРИМЕР 3. Требуется найти приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (38)-(39) из примера 1 с помощью надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Excel.

Решение. Введем в рабочий лист Microsoft Excel формулы, как показано на рисунке 17. Ячейки B1 и B2 отведем под координаты вектора оптимального решения задачи. Запустим надстройку «Поиск решения».

	A	B
1	$x_1 =$	
2	$x_2 =$	
3	$f(x_1, x_2) =$	$=-(B1-8)^2+(B2-8)^2$
4	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	$=3*B1+B2$
5	$\varphi_2(x_1, x_2) =$	$=B1+B2$
6	$b_1 =$	15
7	$b_2 =$	10

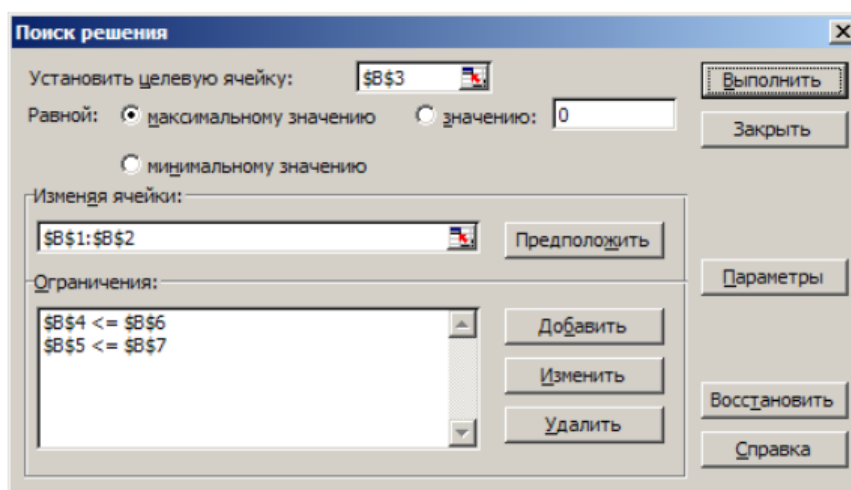
а) формулы Microsoft Excel

	A	B
1	$x_1 =$	
2	$x_2 =$	
3	$f(x_1, x_2) =$	0
4	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	0
5	$\varphi_2(x_1, x_2) =$	0
6	$b_1 =$	15
7	$b_2 =$	10

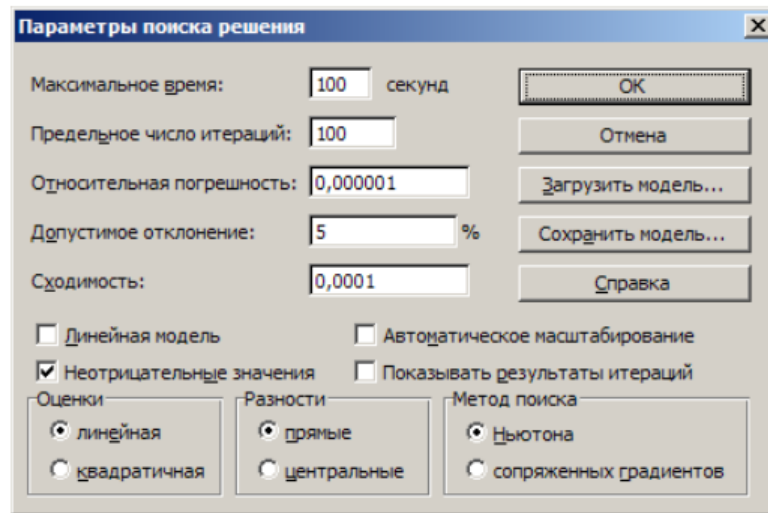
б) результат ввода формул

Рисунок 17 - Исходные данные для решения задачи выпуклого программирования с помощью надстройки «Поиск решения»

В появившемся окне ввода данных (рисунок 18,а) укажем ячейку, в которую введена максимизируемая целевая функция, и ограничения (без учета ограничений неотрицательности, которые введем в окне ввода параметров надстройки «Поиск решения» — см. рисунок 18,б).



а) окно ввода данных



б) окно ввода параметров

Рисунок 18 - Ввод данных в надстройку "Поиск решения"

Результаты работы надстройки «Поиск решения» непосредственно на рабочем листе представлены на рисунке 19.

	A	B
1	$x_1 =$	2,9
2	$x_2 =$	6,3
3	$f(x_1, x_2) =$	-28,9
4	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	15
5	$\varphi_2(x_1, x_2) =$	9,2
6	$b_1 =$	15
7	$b_2 =$	10

Рисунок 19 - Результаты работы надстройки «Поиск решения»

Кроме того, имеется возможность получить Отчеты по результатам, по пределам и по устойчивости, подобные тем, что получались при решении задачи линейного программирования. Предлагаем студенту проанализировать информацию в этих отчетах самостоятельно.

Литература

- 1 Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М., Наука, 1980.
- 2 Колемаев В.А. Практикум по исследованию операций в экономике : учебное пособие для вузов / Под ред. В. А. Колемаева и В. И. Соловьева. — М.: Вега-Инфо, 2010. — 196 с.
- 3 Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов экономических специальностей вузов. - М.: Высшая школа, 1986, 2004. - 319 с.
- 4 Кремер Н.Ш. и др. Исследование операций в экономике - М.: ЮНИТИ, 2003.
- 5 Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование – М.: ВШ, 1976-80.
- 6 Литвин Д. Б. Линейное программирование. Транспортная задача: Учебное пособие / Д.Б. Литвин, С.В. Мелешко, И.И. Мамаев. – Ставрополь : Сервисшкола, 2017. – 84с.

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 07.04.2017. Бумага офсетная. Гарнитура "Times".
Формат 60×84/8. Усл. печ. л. 5,25. Тираж 100 экз. Заказ №14.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии "Сервисшкола",
355011, г.Ставрополь, ул. 45-я Параллель, 36, те./факс.: (8652) 57-47-27, 57-47-25,
<http://книга-ставрополь.рф>, e-mail: s-school@mail.ru